

1. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar  $5 \times 5$  matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice  $J$ .)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar  $J$ .

2. Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  podobné, t.j.  $B = M^{-1}AM$ , potom sú ich minimálne polynómy  $m_A(x)$  a  $m_B(x)$  rovnaké.

3. Nech  $J$  a  $J'$  sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde  $\sigma$  je nejaká permutácia. Ukážte, že matice  $J$  a  $J'$  sú podobné.

*Pozn.* Maticu  $J'$  dostaneme z  $J$  poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov  $e_i$ .

4. (5.R.25) a) Nájdite nenulovú maticu  $N$ , takú aby  $N^3 = 0$ .

b) Ukážte, že ak  $Nx = \lambda x$ , potom  $\lambda$  musí byť nula.

c) Dokážte, že  $N$  (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

5. Ukážte, že  $A^T$  je vždy podobná matici  $A$ . Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre  $A$  skladajúcu sa z jedného bloku  $J_i$  nájdite maticu  $M_i$  takú aby  $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$ .

b) Pre  $A$  v Jordanovom tvare poskladajte maticu  $M_0$  z menších blokov tak, aby  $M_0^{-1}JM_0 = J^T$ .

c) Pre všeobecnú maticu  $A = MJM^{-1}$  ukážte, že  $A^T$  je podobná  $J^T$  a tým pádom aj  $J$  a  $A$ .

6. Majme matice  $A$  a  $B$ . Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že  $AB$  a  $BA$  majú rovnaké vlastné hodnoty.

*Pozn.:* porovnajte s príkladom č. 4 v domácej úlohe č. 4. Vedeli by ste nájsť také  $A$  a  $B$  aby matice  $AB$  a  $BA$  neboli podobné?

7. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.

a) Regulárna matica nemôže byť podobná singularnej matici.

b) Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.

c) Matica  $A$  nemôže byť podobná matici  $-A$  okrem prípadu ak  $A = 0$ .

d)  $A - I$  nemôže byť podobná matici  $A + I$ .

e) matica  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  je podobná matici  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .

f) matica  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  je podobná matici  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

8. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica  $J$  *nie je podobná* matici  $K$ :

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad K = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pre ľubovľnú maticu  $M$  provnajte  $JM$  a  $MK$ . Ak sa rovnajú, ukážte, že  $M$  nie je invertibilná, a teda rovnosť  $M^{-1}JM = K$  nemôže nastať.

9. (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice “nahliadnutím” - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru  $J$  pre maticu  $A$  s exponentami  $d_i$  vo faktorizácii minimálneho polynómu  $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_m)^{d_m}$ ? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice  $A$ ?

11. (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar tak, že zopakujete jednotlivé kroky z dôkazu o jeho existencii (prednáška, resp. Appendix B).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. (B.3) Pre maticu  $B$  z predchádzajúceho príkladu nájdite  $e^{Bt}$  ako  $Me^{Jt}M^{-1}$  a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu  $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \dots$ .

13. (B.7) Predpokladajme, že matica  $A$  spĺňa rovnicu  $A^2 = A$ . Ukážte, že jej Jordanov tvar  $J = M^{-1}AM$  tiež spĺňa  $J^2 = J$ . Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že  $J_i^2 = J_i$  pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok  $J_i$  musí byť veľkosti  $1 \times 1$  a  $J_i = [0]$  alebo  $J_i = [1]$ . Inými slovami,  $A$  je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.

Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou  $A$ ? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?