Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 14. apríla 2008

---

1. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že vlastné podpriestory V_λ, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T, t.j. $T(V_\lambda) = V_\lambda$.

2. Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu B nájdite aj jej Jordanov tvar.

3. a) Použitím Cayley–Hamiltonovej vety nájdite vzorec pre A^{-1} obsahujúci mocniny matice A, $\det A$ a koeficienty jej charakteristického polynómu.
b) Overte správnosť tohto vzorca pre 2×2 matice priamym výpočtom.

4. Nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $\frac{du}{dt} = Au$ pre $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

5. (B.5) Nájdite Jordanov tvar J a maticu M pre maticu B (jej vlastné hodnoty sú $1, 1, 1, -1$)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a vektorový podpriestor $V \subset \mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $v_1 = (0, 1, 0, 1)^T$ a $v_2 = (3, 1, 3, 1)^T$. Ukážte, že lineárne zobrazenie T dané maticou A zobrazuje vektorový podpriestor V sám na seba. Nájdite 2×2 maticu A', ktorá opisuje lineárne zobrazenie $T : V \to V$ v báze (v_1, v_2), nájdite jej vlastné hodnoty a príslušné vlastné vektory vo V.

Nájdite dvojrozmerný vektorový podpriestor $W \subset \mathbb{R}^4$, tak aby W bol tiež invariantný vzhľadom na T, $V \cap W = \{0\}$ a $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

7. Nájdite všetky reálne 2×2 matice spĺňajúce $A^2 = I$.

8. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

9. Matica A sa nazýva *unipotentná* ak je matica $T - I$ nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice A. Čo budú jej vlastné hodnoty?

10. Nech A je 2×2 matica. Z Cayley–Hamiltonovej vety vyplýva, že všetky vyššie mocniny matice A sú lineárnymi kombináciami matíc I a A. Preto môžme očakávať že aj e^A bude ich lienárnou kombináciou.
a) Ukážte, že ak a a b sú vlastné hodnoty 2×2 matice A a $a \neq b$, potom

$$e^A = \frac{ae^b - be^a}{a - b} I + \frac{e^a - e^b}{a - b} A.$$

b) Nájdite správny vzorec pre prípad ak A má dvojnásobnú vlastnú hodnotu.

11. Nech A je komplexná $n \times n$ matica spĺňajúca $A^k = I$ pre nejaké k. Ukážte, že jej Jordanov tvar je diagonálna matica. Aké môžu byť vlastné hodnoty matice A?

12. (6.1.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, a pre každú z nich roznásobte kvadratickú formu $f = x^T A x$:

$$\text{a)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{c)} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad \text{d)} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}.$$

Determinant v časti b) je nulový; pozdĺž ktorej priamky bude forma f nulová?

13. (6.1.3) Ak 2×2 matica spĺňa podmienku $a > 0$ a $ac > b^2$, nájdite vlastné hodnoty ako korene charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ a ukážte, že sú obe kladné.