Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 5. mája 2008

---

1. Ak na vektorovom priestore $\mathcal{P}_3$ skladajúceho sa z polynómov stupňa nanajvýš 3 zavedieme skalárny súčin ako $\langle p(x), q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, môžeme ho pre bázu $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$ a $p_3 = x^3$ vyjadriť pomocou matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}.$$

a) Overte, že LDL^T rozklad tejto matice bude:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \frac{1}{2} & 1 & & \\ \frac{1}{3} & 1 & 1 & \\ \frac{1}{4} & \frac{9}{10} & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{12} & & \\ & & \frac{1}{180} & \\ & & & \frac{1}{2800} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ & 1 & 1 & \frac{9}{10} \\ & & 1 & \frac{3}{2} \\ & & & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Overte, že Gram-Schmidtovou ortogonalizáciou vektorov p_0, p_1, p_2 a p_3 dostaneme tzv. posunuté Legendrove polynómy $q_0 = 1$, $q_1 = x - \frac{1}{2}$, $q_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}$ a $q_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{10}x - \frac{1}{20}$.

c) Nájdite inverznú maticu L^{-1} a porovnajte jej riadky s koeficientami posunutých Legendrových polynómov. Tiež spočítajte $|q_i|^2 = \langle q_i, q_i\rangle$ pre $i = 0, 1, 2, 3$. Vysvetlite.

Na stránke `http://www.uni-bonn.de/~manfear/matrixcalc.php` sa dá nájsť maticová kalkulačka, ktorá pracuje so zlomkami, ale zdá sa, že pri LU-rozklade matice A sa mýli. O posunutých Legendrových polynómoch sa píše napríklad tu: `http://mathworld.wolfram.com/LegendrePolynomial.html`

2. Nech 2×2 reálna symetrická matica A má vlastné hodnoty λ_1 a λ_2 a vlastné vektory q_1 a q_2.

a) Zdôvodnite prečo môžeme predpokladať že $q_1 = \left[\begin{smallmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{smallmatrix}\right]$ a $q_2 = \left[\begin{smallmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{smallmatrix}\right]$. Vyjadrite zložky matice A roznásobením pravej strany rovnosti $A = Q\Lambda Q^{-1}$.

b) Predpokladajme, že vlastná hodnota λ_1 je kladná a λ_2 je záporná. Pre vektor x, ktorý si môžeme vyjadriť ako $x = c_1 q_1 + c_2 q_2$ nájdite riešenie rovnice $x^T A x = 0$.

c) Načrtnite obrázok hyperboly $x^T A x = 1$, ako aj $x^T A x = -1$. Všetky potrebné údaje totiž už máme – osi oboch hyperbol sú vlastné vektory matice A, asymptoty sme spočítali v časti b) a vzdialenosť vrcholov od počiatku súvisí s veľkosťou vlastných hodnôt.

3. Nech T je transformácia roviny (afinného priestoru $\mathbb{R}^2$), ktorá ju otočí o uhol α proti smeru hodinových ručičiek okolo bodu $(a, b)^T$. Nájdite predpis pre obraz všeobecného bodu $x = (x_1, x_2)^T$ v transformácii T.

Návod: Najprv posunieme rovinu o vektor $(-a, -b)^T$, potom otočíme o uhol α okolo počiatku (tomu zodpovedá násobenie nejakou maticou) a nakoniec posunieme naspäť o vektor $(a, b)^T$.

4. V $\mathbb{R}^4$ majme dve parametricky zadané mimobežné priamky:

$$p = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + t \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad \text{a} \qquad q = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + s \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \middle| \, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nájdite ich vzdialenosť.

Návod: Nájdite vektorový podpriestor V, ktorý bude kolmý na obe priamky. Nájdite projekcie priamok p a q do priestoru V. Vzdialenosť priamok by mala byť vzdialenosťou týchto dvoch projekcií. Tiež zdôvodnite, prečo projekciami budú body a nie priamky.

Alternatívny návod: Vzdialenosť priamok spĺňa $d(p, q) = \min_{X \in p, Y \in q} d(X, Y)$, z čoho sa ľahko nahliadne, že $d(p, q)^2 = \min_{X \in p, Y \in q} d(X, Y)^2$. Z parametrického vyjadrenia bodov X a Y dostaneme $d(X, Y)^2$ ako kvadratickú funkciu parametrov t a s, ktorej minimum vieme nájsť spočítaním parciálnych derivácií.

5. V $\mathbb{R}^4$ majme rovinu ρ danú parametricky ako

$$\rho = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{smallmatrix}\right] + s \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] + t \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] \middle| \, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Nájdite ortogonálnu projekciu bodu $A = (3, 2, 3, 2)^T$ do roviny ρ.

Návod: Podobne ako v príklade č. 3 môžme najprv celý priestor posunúť tak, aby rovina prechádzala cez počiatok, nájsť príslušnú projekčnú maticu, sprojektovať a následne posunúť všetko naspäť. Alebo, podobne ako v príklade č. 4, môžeme minimalizovať kvadratickú funkciu $d(X, A)^2$ pre $X \in \rho$.

6. Overte, že binárna operácia $\max(a, b)$ je na množine nezáporných reálnych čísel $\mathbb{R}_0^+$ asociatívna, komutatívna a jej neutrálny prvok je 0. Nahliadnite, že operácia max nebude grupovou operáciou kvôli neexistencii inverzných prvkov.

Pozn. Podobné vlastnosti majú operácie najmenšieho spoločného násobku $\text{nsn}(a, b)$ na množine prirodzených čísel $\mathbb{N}$, či operácia množinového zjednotenia $\bigcup$ na ľubovoľnej potenčnej množine $\mathcal{P}(T)$.

7. a) Ukážte, že zobrazenie z $\mathbb{C}$ do priestoru 2×2 matíc generované $1 \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ a $i \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ (vo všeobecnosti $(a + bi) \mapsto \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right]$) rešpektuje operácie sčítania a násobenia v oboch množinách.

b) Označme ako $\mathbf{1} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{i} = \left[\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{j} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ a $\mathbf{k} = \left[\begin{smallmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Ukážte, že osemprvková množina

$$\mathbb{H} = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$$

tvorí grupu vzhľadom na maticové násobenie; ide o tzv. jednotkové kvaternióny.

8. V grupe regulárnych $n \times n$ matíc $GL_n(\mathbb{R})$ bude nejaká jej množina M podgrupou, ak pre každé dve matice $A, B \in M$ budú aj matice AB a A^{-1} patriť do M. Rozhodnite ktoré z nasledujúcich množín tvoria podgrupu $GL_n(\mathbb{R})$:

– kladne definitné symetrické matice,
– ortogonálne matice,
– exponenciály tvaru e^{At} pre fixnú maticu A,
– matice s kladnými vlastnými hodnotami,
– matice s determinantom 1.

Skúste objaviť podgrupu, ktorej všetky prvky sú symetrické kladne definitné matice.

9. Overte, že transformácie f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 a f_6 dané predpismi $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \frac{1}{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, $f_4(x) = \frac{1}{1-x}$, $f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}$ a $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ tvoria grupu transformácií množiny $\mathbb{R} - \{0, 1\}$. Zostavte tabuľku grupovej operácie a zistite, či je táto grupa komutatívna. Zistite čo robia transformácie s bodmi $\frac{1}{2}$, 2, -1 (resp. 0, 1 a ∞).

10. Ukážte, že množina transformácií $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ daných predpismi $f(X) = ax + b$ pre $a \neq 0$ tvorí grupu.

11. Rozhodnite, či sú nasledujúce dvojice grúp izomorfné:
a) $(\mathbb{Z}_7 - \{0\}, \cdot)$ a $(\mathbb{Z}_6, +)$,
b) $(\mathbb{R}, +) \times (\mathbb{R}, +)$ a $(\mathbb{C}, +)$,
c) $(\mathbb{Z}_2, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$ a $(\mathbb{Z}_4, +)$.

12. Rozhodnite či sú nasledujúce zobrazenia grupové homomorfizmy. Nájdite jadrá a obrazy homomorfizmov.
a) $\phi_1 : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, dané predpisom $\phi_1(n) = i^n$.
b) $\phi_2 : (\mathbb{R}^3, +) \to (\mathbb{R}^2, +)$, dané predpisom $\phi_2(a, b, c) = (a - b, b + 2c)$.
c) $\phi_3 : (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot) \to (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, dané predpisom $\phi_3(z) = \frac{z}{|z|}$.
d) $\phi_4 : GL_n(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, dané predpisom $\phi_4(A) = \det(A)$.