Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 12

Príklady na precvičenie látky z posledných prednášok.

---

1. Ukážte, že grupa $(\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$ obsahuje prvky rádu n pre ľubovoľné kladné n. Platí niečo podobné pre $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$?

2. Pre nasledujúce grupy G overte, že množiny H tvoria podgrupy. Nájdite tiež rozklady G na triedy podľa týchto podgúp.
a) $G = (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$, $H = \mathbb{Q}^+$,
b) $G = (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$, $H = \{1, -1\}$,
c) $G = (\mathbb{C} - \{0\}, \cdot)$, $H = \{c \in \mathbb{C} \,|\, c^n = 1\}$,
d) $G = GL_2(\mathbb{Z}_2) = \{$regulárne matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_2\}$ a H je generovaná maticou $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$,
e) $G = \{$regulárne horné trojuholníkové matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_3\}$ a $H = \{$diagonálne matice$\}$,
f) $G = \{$regulárne horné trojuholníkové matice typu 3×3 nad $\mathbb{Z}_2\}$ a H je generovaná maticou $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

3. Nech ϕ je grupový izomorfizmus medzi grupami G a H. Ukážte, že aj ϕ^{-1} spĺňa podmienky grupového izomorfizmu, menovite $\phi^{-1}(i)\phi^{-1}(j) = \phi^{-1}(ij)$ pre všetky $i, j \in H$.

4. Zistite, či sú nasledujúce grupy cyklické
a) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4, +)$,
b) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3, +)$,
c) $(\mathbb{Z}_{11} - \{0\}, \cdot)$.

5. Rozhodnite či sú nasledujúce dvojice grúp izomorfné:
a) grupa symetrií rovnostranného trojuholníka D_3 a grupa všetkých permutácií množiny $\{1, 2, 3\}$ – symetrická grupa S_3.
b) grupa symetrií štvorca D_4 a grupa S_4.

6. Nájdite všetky podgrupy grúp:
a) $(\mathbb{Z}, +)$,
b) $(\mathbb{Z}_6, +)$,
c) D_3.

7. a) Ukážte, že v grupe S_6 (grupe permutácií šesťprvkovej množiny) existujú prvky rádov 1, 2, 3, 4, 5 a 6, ale nie vyšších.
b) Ukážte, že v S_7 okrem prvkov rádov 1, 2, 3, 4, 5, 6 a 7, existujú aj prvky rádov 10 a 12.

8. a) Opíšte grupu transformácií tenisovej loptičky – t.j. transformácií priestoru $\mathbb{R}^3$, ktoré zobrazia ideálnu tenisovú loptičku samu na seba, šev na šev.
Ktoré z nich vieme realizovať v bežnom trojrozmernom priestore a ktoré nie? Prečo?
b) Ako to bude s grupami transformácií klasickej basketbalovej, futbalovej ci volejbalovej lopty? Ako pre frisbie?

9. Overte, že nasledujúce 4 matice typu 2×2 nad $\mathbb{Z}_2$ tvoria pole $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Ukážte, že toto pole nie je izomorfné s okruhmi $\mathbb{Z}_4$ a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

10. Ukážte, že množina symbolov $\{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ tvorí pole s deviatimi prvkami, ak zákony binárnych operácií kopírujú sčítanie a násobenie komplexných čísel. Bude podobný postup fungovať pre $\mathbb{Z}_5$? Pre $\mathbb{Z}_7$? Vysvetlite.