

1. (5.1.5) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  sa rovná stope matice a súčin  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$  sa rovná determinantu.

2. (5.1.7) Predpokladajme, že  $\lambda$  je vlastná hodnota matice  $A$  a  $x$  je príslušný vlastný vektor, t.j.  $Ax = \lambda x$ .

(a) Ukážte, že  $x$  je tiež vlastným vektorom matice  $B = A - cI$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ . Nájdite vlastnú hodnotu príslúchajúcu vektoru  $x$ .

(b) Predpokladajme, že  $\lambda \neq 0$ . Ukážte, že potom je  $x$  vlastným vektorom matice  $A^{-1}$  a nájdite vlastnú hodnotu.

3. (5.1.10) (a) Skonstruujte  $2 \times 2$  matice  $A$  a  $B$  také, že vlastné hodnoty súčinu  $AB$  nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne vlastné hodnoty  $A + B$  nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.

(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice  $A + B$  rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

4. (5.1.11) Ukážte, že  $A$  a  $A^T$  majú rovnaké vlastné hodnoty porovnaním ich charakteristických polynómov.

5. (5.1.12) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre maticu  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ .

6. (5.1.13) Ak matica  $B$  má vlastné hodnoty 1, 2, 3, matica  $C$  má vlastné hodnoty 4, 5, 6 a matica  $D$  má vlastné hodnoty 7, 8, 9, čo budú vlastné hodnoty  $6 \times 6$  matice  $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$ ?

7. (5.1.14) Nájdite hodnotu a všetky štyri vlastné hodnoty pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aké vlastné vektory zodpovedajú nenulovým vlastným hodnotám?

8. (5.1.16) Nech  $A$  je  $4 \times 4$  matica, ktorej zložky sú samé jednotky (ako v predošlom príklade). Nájdite potom vlastné hodnoty a determinant matice  $A - I$ . Porovnajte tiež s príkladom 4.3.10 - DÚ č. 10, príklad 13.

9. (5.1.18) Predpokladajme, že matica  $A$  má vlastné hodnoty 0, 1, 2 a k nim vlastné vektory  $v_0, v_1, v_2$ . Opíšte nulový priestor a stĺpcový priestor matice  $A$ . Riešte rovnicu  $Ax = av_1 + bv_2$ . Ukážte, že rovnica  $Ax = v_0$  nemá riešenie.

10. (5.2.2) Nájdite maticu  $A$ , ktorej vlastné hodnoty sú 1 a 4 a vlastné vektory k nim sú  $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$  a  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ .

11. (5.2.6) (a) Ak  $A^2 = I$ , aké môže mať matica  $A$  vlastné hodnoty?

(b) Ak je takáto matica typu  $2 \times 2$  a nerovná sa  $I$  alebo  $-I$ , nájdite jej stopu a determinant.

(c) Dopocítajte druhý riadok matice, ak je jej prvý riadok  $(3, -1)$ .

12. (5.2.8) Predpokladajme, že  $A = uv^T$ , teda matica  $A$  vznikne vynásobením stĺpca riadkom (a má preto hodnotu 1).

- (a) Ukážte, pre násobením matice  $A$  vektorom  $u$ , že  $u$  je jej vlastný vektor. Čo bude  $\lambda$ ?
- (b) Aké sú ostatné vlastné hodnoty (a prečo)?
- (c) Vypočítajte  $\text{stopa}(A) = v^T u$  dvoma rôznymi spôsobmi – ako súčet prvkov na diagonále a ako súčet vlastných hodnôt.

**13.** (5.2.9) Priamym výpočtom ukážte, že  $AB$  a  $BA$  majú rovnakú stopu, keď

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Odvoďte z toho, že  $AB - BA = I$  nemôže nastať. (Je to možné iba pre zobrazenia na nekonečne rozmerných priestoroch)