Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 9. marca 2009

Pre niektoré z nasledujúcich úloh budete potrebovať nasledujúce fakty:

Lineárna diferenciálna rovnica $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$ má všeobecné riešenie tvaru

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} y_n,$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sú vlastné vektory $n \times n$ matice A a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jej vlastné hodnoty. Koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sa vypočítajú zo začiatočnej podmienky $u_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$.

To isté sa dá zapísať aj ako $u(t) = e^{At} u_0$, kde $e^{At} = Se^{\Lambda t} S^{-1}$ a $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ & \cdot \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$. Alternatívne $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \ldots$.

Časť sme ukázali na prednáške 3. marca 2009, zvyšok dôkazov a podrobné zdôvodnenia budú na prednáške 10. marca 2009.

1. Každá permutačná matica necháva vektor $x = (1, 1, \ldots, 1)^T$ nezmenený. Preto jedna z jej vlastných hodnôt je $\lambda = 1$. Nájdite zvyšné vlastné hodnoty pre permutačné matice:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi $(1, 1, 1)^T$ (resp. $(1, 1, 1, 1)^T$)?

2. Pre maticu rotácie Q riešte charakteristickú rovnicu $\det(Q - \lambda I) = 0$ pomocou vzorca na korene kvadratickej rovnice a presvedčte sa, že $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i \sin\theta$:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Matica Q reprezentuje rotáciu $\mathbb{R}^2$ o uhol θ. Nájdite tiež vlastné vektory matice Q riešením (komplexnej) lineárnej rovnice $(Q - \lambda I)x = 0$.

3. Existuje reálna 2×2 matica, rôzna od I, ktorá spĺňa $A^3 = I$? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať $\lambda^3 = 1$, čo spĺňajú práve čísla $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akú stopu a determinant by teda mala matica A mať? Nájdite A.

4. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu e^{At} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžte vypočítať pomocou vozrca $e^{At} = Se^{\Lambda t} S^{-1}$ alebo sčítaním nekonečného radu $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots$

5. (5.4.2) Pre maticu A z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $du/dt = Au$. Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $u_0 = (3, 1)^T$. Aký je *rovnovážny stav* keď $t \to \infty$? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu; $\lambda = 0$ v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá $\lambda = 1$ v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti $e^{0t} = 1$).

6. (5.4.4) Ak P je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \ldots$, že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

7. (5.4.5) Diagonálna matica, napr. $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, spĺňa rovnosť $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t} e^{\Lambda T}$, nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

a) zdôvodnite prečo platí $e^{A(t+T)} = e^{At} e^{AT}$, použijúc vzťah $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$,

b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah $e^{A+B} = e^A e^B$ na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov)}$$

8. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre u_1', u_2' a u_3' a ukážte, že $u_1' u_1 + u_2' u_2 + u_3' u_3 = 0$,

b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ je konštantná v čase,

c) nájdite vlastné hodnoty matice A.

Vektor riešení bude rotovať okolo osi $w = (a, b, c)^T$, nakoľko Au je *vektorový súčin* $u \times w$, ktorý je kolmý na u aj w.

9. Vychádzajúc zo vzorca $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At}$.

10. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín J^k. Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte e^{Jt}.

Skúste výpočítať mocniny J_n^k a exponenciálu $e^{J_n t}$ aj pre $n \times n$ maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$