Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 30. marca 2009

---

1. (5.5.21) Nájdite všetky 3×3 matice, ktoré sú súčasne hermitovské, unitárne aj diagonálne. Koľko ich bude?

2. Ak vynásobíme hermitovskú maticu A reálnym číslom c, bude potom aj matica cA hermitovská? Ak zvolíme $c = i$, ukážte, že potom bude iA anti-hermitovská. Vysvetlite ako tento fakt súvisí s vetou o vlastných hodnotách hermitovských a anti-hermitovských matíc.

3. Ak $A + iB$ je unitárna matica (A aj B sú reálne matice), ukážte, že $Q = \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right]$ je ortogonálna matica.

4. Ak $A = R + iS$ je hermitovská matica, budú reálne matice R a S symetrické?

5. (5.R.19) Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

6. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.

a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.

c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

7.(5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3, spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.

b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice $A = S\Lambda S^{-1}$: Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I) = 0$.

8. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.