Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 9

Cvičenia v týždni 27. apríla 2009

---

1. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J.)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar J.

2. Ukážte,že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

3. Nech J a J' sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde σ je nejaká permutácia. Ukážte, že matice J a J' sú podobné.

Pozn. Maticu J' dostaneme z J poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov e_i.

4. (5.R.25) a) Nájdite nenulovú maticu N, takú aby $N^3 = 0$.

b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.

c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

5. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A. Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1} J_i M_i = J_i^T$.

b) Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1} J M_0 = J^T$.

c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A.

6. Majme matice A a B. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

Pozn.: porovnajte s príkladom č. 4 v domácej úlohe č. 4. Vedeli by ste nájsť také A a B aby matice AB a BA neboli podobné?

7. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.

a) Regulárna matica nemôže byť podobná singulárnej matici.

b) Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.

c) Matica A nemôže byť podobná matici $-A$ okrem prípadu ak $A = 0$.

d) $A - I$ nemôže byť podobná matici $A + I$.

e) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

f) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

8. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{a} \qquad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať.

9. (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice "nahliadnutím" - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

10. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru J pre maticu A s exponentami d_i vo faktorizácii minimálneho polynómu $m_A(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}(x-\lambda_2)^{d_2}\dots(x-\lambda_m)^{d_m}$? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice A?

11. (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar a pokuste sa nájsť aj maticu M z rovnosti $A = MJM^{-1}$. (v prípade nejasností pozrite Appendix B v knižke)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12. (B.3) Pre maticu B z predchádzajúceho príkladu nájdite e^{Bt} ako $Me^{Jt}M^{-1}$ a porovnajte výsledok so súčtom nekoneč ného radu $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \cdots$.

13. (B.7) Predpokladajme, že matica A spĺňa rovnicu $A^2 = A$. Ukážte, že jej Jordanov tvar $J = M^{-1}AM$ tiež spĺňa $J^2 = J$. Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že $J_i^2 = J_i$ pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok J_i musí byť veľkosti 1×1 a $J_i = [\,0\,]$ alebo $J_i = [\,1\,]$. Inými slovami, A je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.
Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou A? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?

14. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že vlastné podpriestory V_λ, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T, t.j. $T(V_\lambda) = V_\lambda$.

15. Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu B nájdite aj jej Jordanov tvar.