Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 4. mája 2009

---

1. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a vektorový podpriestor $V \subset \mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $v_1 = (0, 1, 0, 1)^T$ a $v_2 = (3, 1, 3, 1)^T$. Ukážte, že lineárne zobrazenie T dané maticou A zobrazuje vektorový podpriestor V sám na seba. Nájdite 2×2 maticu A', ktorá opisuje lineárne zobrazenie $T : V \to V$ v báze (v_1, v_2), nájdite jej vlastné hodnoty a príslušné vlastné vektory vo V.

Nájdite dvojrozmerný vektorový podpriestor $W \subset \mathbb{R}^4$, tak aby W bol tiež invariantný vzhľadom na T, $V \cap W = \{0\}$ a $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

2. Nech A je komplexná $n \times n$ matica spĺňajúca $A^k = I$ pre nejaké k. Ukážte, že jej Jordanov tvar je diagonálna matica. Aké môžu byť vlastné hodnoty matice A?

3. (6.1.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, a pre každú z nich roznásobte kvadratickú formu $f = x^T Ax$:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$.

Determinant v časti b) je nulový; pozdĺž ktorej priamky bude forma f nulová?

4. (6.1.3) Ak 2×2 matica spĺňa podmienku $a > 0$ a $ac > b^2$, nájdite vlastné hodnoty ako korene charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ a ukážte, že sú obe kladné.

5. (6.1.5) a) Pre aké hodnoty parametra b je matica $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{smallmatrix}\right]$ kladne definitná?
b) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ pre b z intervalu kladnej definitnosti.
c) Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $\frac{1}{2}(x^2 + 2bx + 9y^2) - y$ pre b z tohto intervalu.
d) Aké je minimum pre $b = 3$?

6. (6.1.7) a) Nájdite 3×3 matice A_1, A_2 zodpovedajúce kvardatickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma f_1 sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je f_1 rovná nule?
c) Nájdite rozklad A_2 ako LL^T (L je dolná trojuholníková matica). Vyjadrite f_2 ako súčet troch štvorcov.

7. (6.1.9) Kvadratická forma $f = 3(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2$ je kladne definitná. Nájdite jej maticu A, rozložte ju ako LDL^T a vysvetlite súvislosť zložiek matíc D a L s pôvodným tvarom formy f.

8. (6.2.1) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

9. (6.2.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

10. (6.2.4) S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica A kladne definitná, potom sú aj matice A^2 a A^{-1} kladne definitné.

11. (6.2.5) Ukážte, že ak sú matice A a B kladne definitné, potom je takou aj matica $A+B$. Ktoré z kritérií kladnej definitnosti I – IV sa hodí v tomto prípade?

12. (6.2.6) Použitím pivotov, vlastných hodnôt a vlastných vektorov matice $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ zapíšte A v tvare $R^T R$ všetkými troma spôsobmi z prednášky – $(LD^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}L^T)$, $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$, a $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$.

13. (6.2.10) Elipsa $u^2 + 4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ (pozri príklad č. 8).

14. (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby 3×3 matica A bola *záporne definitná* (matica $-A$ je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu $\det A$ a $\det(-A)$.