Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 11. mája 2009, resp. cvičenia ako príprava na skúšku

---

1. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A + I) = 1$.

2. Matica A sa nazýva *unipotentná* ak je matica $A - I$ nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice A. Čo budú jej vlastné hodnoty?

3. (6.2.8) Ak je matica A symetrická a kladne definitná a C je regulárna, ukážte, že matica $B = C^T AC$ je tiež symetrická a kladne definitná.

4. (6.2.9) Ak sa matica A dá napísať ako $R^T R$, dokážte, že platí zovšeobecnená Cauchy–Schwarzova nerovnosť $|x^T Ay|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$.

5. (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezenutje elipsoid pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

6. (6.2.16) *Pravda/Nepravda* Ak je matica A symetrická kladne definitná a Q je ortogonálna, potom:
a) $Q^T AQ$ je diagonálna matica,
b) $Q^T AQ$ je symetrická kladne definitná matica,
c) $Q^T AQ$ má rovnaké vlastné hodnoty ako A,
d) e^{-A} je symetrická kladne definitná matica.

7. (6.2.17) Ak je matica A kladne definitná a zväčšíme v nej zložku a_{11}, ukážte pomocou Laplaceovho rozvoja, že aj jej determinant sa zvýši. Nájdite príklad indefinitnej matice, kde toto nebude pravda.

8. (6.2.18) Z rozkladu $A = R^T R$ ukážte, že pre kladne definitné matice platí $\det A \leq a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.
Pomôcka: Druhá mocnina dĺžky j-teho stĺpca matice R bude práve zložka a_{jj} v matici A, tiež treba použiť vzťah *determinant = objem.*

9. (6.2.19)(*L'japunovov test stability*) Predpokladajme, že $AM + M^H A = -I$ pre nejakú kladne definitnú maticu A. Ak $Mx = \lambda x$, ukážte, že $\operatorname{Re} \lambda < 0$.
Pomôcka: Vynásobte maticovú rovnosť x^H a x.

10. (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 2)} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 1)}$$

vyjadrite $x^T Ax$ ako súčet dvoch štvorcov a $x^T Bx$ ako jeden štvorec.

11. (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

12. (6.3.4) Je pravdou, že ak sú všetky pivoty matice väčšie ako 1, potom aj jej vlastné hodnoty sú väčšie ako 1? Overte na tridiagonálnych maticiach s diagonálami -1, 2, -1.

13. (6.3.6) Algebraický dôkaz Silvestrovho zákona zotrvačnosti prebieha nasledovne.
Rovnako ako na prednáške predpokladáme, že A a $C^T AC$ nemajú nulové vlastné hodnoty. Potom nech $x_1, \dots, x_p$ sú ortonormálne vlastné vektory matice A zodpovedajúce kladným vlastným hodnotám

$\lambda_i > 0$, $y_1, \dots, y_q$ sú ortonormálne vlastné vektory matice C^TAC zodpovedajúce záporným vlastným hodnotám $\mu_i < 0$.

a) Aby sme ukázali, že vektory $x_1, \dots, x_p, Cy_1, \dots, Cy_q$ sú lineárne nezávislé, predpokladajme, že nejaká ich kombinácia dá nulu:

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b_1Cy_1 + \cdots + b_qCy_q (= z, \text{povedzme}).$$

Ukážte, že $z^TAz = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$ a tiež $z^TAz = \mu_1 b_1^2 + \cdots + \mu_q b_q^2 \leq 0$.

b) Odvoďte z toho, že všetky a_i aj b_i musia byť nulové, čo znamená lineárnu nezávislosť. Z toho ukážte, že $p + q \leq n$.

c) Rovnaký argument môžme použiť pre $n - p$ záporných vlastných hodnôt matice A a $n - q$ kladných vlastných hodnôt matice C^TAC. To dá $n - p + n - q \leq n$. Ukážte, že potom $p + q = n$ a zákon zotrvačnosti naozaj platí.

14. (6.3.7) Ak je C regulárna matica, ukážte, že A a C^TAC majú rovnakú hodnosť. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

15. (6.3.8) Experimentovaním zistite signatúru $2n \times 2n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde B je regulárna $n \times n$ matica.

16. Nech A je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

17. Nech $M_{n,n}$ označuje vektorový priestor reálnych matíc typu $n \times n$. Ukážte, že $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^TB)$ je kladne definitná symetrická bilineárna forma na $M_{n,n}$ – t.j. je to skalárny súčin (Pozn. tr značí stopu – súčet diagonálnych zložiek matice). Nájdite ortonormálnu bázu priestoru matíc vzhľadom na túto formu, povedzme pre $n = 2, 3$.

18. Dokážte alebo vyvráťte: matica A typu $n \times n$ je antisymetrická práve vtedy, keď $x^TAx = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$.