

1. (2.6.5) Priamku prechádzajúcu cez koncové body vektorov  $u$  a  $v$  môžeme reprezentovať ako koncové body množiny vektorov  $P = \{tu + (1-t)v \mid t \in \mathbb{R}\}$ . Ukážte, že každá lineárna transformácia  $\alpha$  zobrazuje priamku na priamku. Tiež ukážte, že stred úsečky tvorenej koncovými bodmi vektorov  $x$  a  $y$  sa zobrazí na stred úsečky z  $\alpha(x)$  do  $\alpha(y)$ .

2. (2.6.9) Nájdite maticu lineárnej transformácie (je to naozaj lineárna transformácia?) z priestoru polynómov  $P_3(t)$  do priestoru  $P_4(t)$ , ktorá každému polynómu priradí jeho  $(2+3t)$ -násobok.

3. (2.6.13) Predpokladajme, že  $\alpha$  je lineárna transformácia roviny  $xy$  reprezentovaná maticou  $M$ . Ukážte, že ak existuje zobrazenie  $\alpha^{-1}$ , potom je aj ono lineárnou transformáciou. Vysvetlite prečo matica  $M^{-1}$  reprezentuje  $\alpha^{-1}$ .

4. (2.6.21) Lineárna transformácia posielajúca vektor tvaru  $(x_1, x_2, x_3)$  do  $(x_2, x_3, x_1)$  je rotácia. Nájdite jej os a uhol.

5. (2.R.10) Vymyslite vektorový priestor, ktorý obsahuje všetky lineárne transformácie z  $\mathbb{R}^n$  do  $\mathbb{R}^n$ . Musíte definovať sčítanie lineárnych transformácií, ako aj násobenie skalárom. Aká bude dimenzia takéhoto priestoru?

6. (2.R.23) Ako by sa dala skonštruovať matica, ktorá zobrazí vektory štandardnej bázy  $e_1, e_2, e_3$  na dané vektory  $v_1, v_2, v_3$ ? Kedy bude takáto matica invertibilná?

7. (3.1.6) V  $\mathbb{R}^3$  nájdite všetky vektory, ktoré sú kolmé na vektory  $(1, 1, 1)$  a  $(1, -1, 0)$ . Vytvorte z týchto vektorov bázu  $\mathbb{R}^3$ , v ktorej budú všetky vektory navzájom ortogonálne a budú mať jednotkovú dĺžku (tvoria tzv. *ortonormálnu* bázu).

8. (3.1.8) Nech  $V$  a  $W$  sú ortogonálne podpriestory. Ukážte, že iba nulový vektor patrí do oboch z nich, t.j.  $V \cap W = \{0\}$ .

9. (3.1.11) Tvrdenie o riešiteľnosti systémov lineárnych rovníc sa dá formulovať pomocou tzv. *Fredholmovej alternatívy*: pre každé  $A$  a  $b$  má práve jeden zo systémov riešenie

$$(i) \quad Ax = b \qquad (ii) \quad A^T y = 0, \quad y^T b \neq 0.$$

Inými slovami, buď  $b$  patrí do stĺpcového priestoru  $\mathcal{S}(A)$  alebo existuje  $y$  v  $\mathcal{N}(A^T)$  také, že  $y^T b \neq 0$ . Ukážte, že rovnice (i) a (ii) nemôžu mať riešenie zároveň.

10. (3.1.14) Ukážte, že  $x - y$  je kolmé na  $x + y$  práve vtedy, keď  $\|x\| = \|y\|$ .

11. (3.1.19) Pravda/Nepravda. Zdôvodnite.

a) ak  $V$  je ortogonálne k  $W$ , potom aj  $V^\perp$  je ortogonálne k  $W^\perp$ ,

b) Ak  $V$  je ortogonálne k  $W$  a  $W$  je ortogonálne k  $Z$ , potom aj  $V$  je ortogonálne k  $Z$ .

12. (3.1.22) Nech  $S$  je podpriestor  $\mathbb{R}^4$  tvorený vektormi spĺňajúcimi  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ . Nájdite bázu priestoru  $S^\perp$ , t.j. priestoru vektorov kolmých na  $S$ .

13. (2.6.19) Vo vektorovom priestore  $P_3(t)$  polynómov stupňa 3, t.j.  $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ , majme podmnožinu  $S$  polynómov spĺňajúcich  $\int_0^1 p(t)dt = 0 \in \mathbb{R}$ . Overte, že  $S$  je podpriestor a nájdite jeho bázu.

*Pozn.* Použite vzorec  $\int_0^1 t^k dt = \frac{1}{k+1}$ . Všimnite si, že zobrazenie  $p(t) \mapsto \int_0^1 p(t)dt$  je lineárna transformácia z  $P_3(t)$  do  $\mathbb{R}$  a množina  $S$  jej jadro.