Podvádzanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebry a geometrie I., 12. november 2020

1. Majme homogénny systém $Ax = 0$, daný maticou

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1-\beta & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2\beta & \alpha & \beta \end{bmatrix},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

a) Pre každú dvojicu α, β nájdite dimenziu priestoru riešení $\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$.

b) Pre aké $b \in \mathbb{R}^3$ je systém $Ax = b$ riešiteľný? (odpoveď by opäť mala závisieť od hodnôt α a β)

2. Pre parametre $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ uvažujme $(n+1) \times (n+1)$ maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & u_2 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & u_n \\ u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_n & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite hodnosť matice A v závislosti od parametrov $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Kedy je A regulárna?

b) V regulárnom prípade nájdite inverznú maticu A^{-1}.

3. Uvažujme vektorový priestor $\mathcal{P}_2(t)$ polynómov stupňa nanajvýš 2, vektorový priestor $M_{2,2}(\mathbb{R})$ matíc typu 2×2 a zobrazenie $\alpha : \mathcal{P}_2(t) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ definované priradením

$$\alpha : p(t) \mapsto \begin{bmatrix} p(-1) & p(0) \\ p(0) & p(1) \end{bmatrix}.$$

a) Ukážte, že α je lineárne zobrazenie.

b) Nájdite bázy priestorov $\mathcal{P}_2(t)$ a $M_{2,2}(\mathbb{R})$ a maticu zobrazenia T_α vzhľadom na tieto bázy.

c) Nájdite jadro a obraz zobrazenia α, určite ich dimenzie a nájdite ich bázy.

d) Rozhodnite, či k matici T_α existuje pravá/ľavá inverzná matica. Ak nie, zdôvodnite. Ak áno, nájdite nejakú. Aké zobrazenie α' by takej inverznej matici, ak existuje, zodpovedalo?

4. Nech A a B sú štvorcové nilpotentné matice, t.j. $A^k = 0$ a $B^l = 0$ pre nejaké $k, l \in \mathbb{N}$. Navyše predpokladajme, že A a B komutujú. Ukážte, že matice AB a $A + B$ sú tiež nilpotentné.

5. Nájdite všetky matice A typu 2×2, majúce nasledujúcu vlastnosť:

$$AB = BA \quad \text{pre každú } 2 \times 2 \text{ maticu } B.$$