

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia.
Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 17. december 2020

1. Majme matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

- a) Nájdite bázy a dimenzie pre $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$.
b) Nájdite bázy a dimenzie pre $\mathcal{S}(A^T)$, $\mathcal{S}(B^T)$, $\mathcal{S}(A^T) \cap \mathcal{S}(B^T)$.

2. Predpokladajme, že pre $n \times n$ maticu A platí $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^T)$.

- a) Aká je hodnota matice A ? Čo z toho vyplýva pre n ?
b) Platí potom aj $\mathcal{S}(A)^\perp = \mathcal{S}(A^T)$? Zdôvodnite.
c) Nájdite 4×4 maticu, ktorá spĺňa takúto podmienku.

3. Nech podmnožinu $V_c \subseteq \mathbb{R}^4$ tvoria vektory, pre ktoré platí, že súčet prvej a tretej zložky je rovný nule a štvrtá zložka je c -násobkom súčtu prvej a druhej zložky. Číslo c je nejaký pevne zvolený reálny parameter.

- a) Ukážte, že V_c je vektorový podpriestor.
b) Nájdite bázu a dimenziu podpriestoru V_c vzhľadom na parameter c .
c) Nájdite bázu podpriestoru V_c^\perp .

4. Nech q_1, q_2, \dots, q_n je nejaká ortonormálna báza priestoru \mathbb{R}^n . Matica A je daná ako

$$A = q_1 q_1^T + q_2 q_2^T + \dots + q_n q_n^T.$$

- a) Čomu sa rovná $A q_i$ pre $i = 1, 2, \dots, n$? Vysvetlite.
b) Nech

$$B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}.$$

Čomu sa rovná súčin AB ?

- c) Ukážte, že $A = I$.

5. Nájdite determinant 4×4 matice A s reálnym parametrom t :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & t \\ 1 & 1 & t & 0 \\ 0 & t & 2 & -1 \\ t & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pre aké hodnoty parametra t je matica A singulárna?