Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 12. január 2021

1. *(5 bodov)* V $\mathbb{R}^5$ uvažujme podpriestor U daný rovnicami: $x_1 = x_5$, $x_2 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$.

a) Nájdite podobné rovnice pre priestor $U^\perp$ a nájdite jeho ortonormálnu bázu.

b) Nájdite ortonormálnu bázu $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ priestoru $\mathbb{R}^5$ tak, aby $v_1, v_2 \in U$.

c) Nájdite maticu kolmej projekcie na U.

2. *(5 bodov)* Nech vektory $x_1, x_2, \ldots, x_k$ tvoria lineárne nezávislú množinu vo vektorovom priestore V. Nech $\alpha : V \to W$ je lineárne zobrazenie a $\ker(\alpha) = \{0\}$. Ukážte, že potom sú vektory $\alpha(x_1)$, $\alpha(x_2)$, $\ldots$, $\alpha(x_k)$ lineárne nezávislé.

3. *(6 bodov)* Majme zobrazenie polynómov $A : \mathcal{P}_4(x) \to \mathcal{P}_4(x)$ dané predpisom

$$(Ap)(x) = (x-2)(p'(x) - xp(-1)).$$

a) Ukážte, že zobrazenie A je lineárne.

b) Nájdite maticu zobrazenia A vzhľadom na nejakú bázu $\mathcal{P}_4(x)$.

c) Nájdite jadro a obraz zobrazenia A.

d) Ako vyzerá množina polynómov, pre ktoré platí $Ap(x) = 3p(x)$?

4. *(4 body)* Nech $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ je štvorcová matica. Ukážte, že matica $I - A + A^T$ je regulárna. *Návod:* využite vzťahy kolmosti pre $x \in \mathcal{N}(I - A + A^T)$.

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:

a) Ak $U^\perp \perp V$, potom $U \perp V^\perp$.

b) Vektory $(\lambda, 1, 1)^T$, $(1, \lambda, 1)^T$, $(1, 1, \lambda)^T$ sú lineárne nezávislé práve vtedy, keď $\lambda = 1$.

c) Ak $h(A) < n$ pre $2n \times 2n$ maticu A, potom existuje nenulový vektor patriaci do $N(A)$ aj $N(A^T)$.

d) Množina riešení rovnice $|\det(B)| = 1$ pre $B \in M_{n,n}$ je uzavretá vzhľadom na maticové násobenie.

e) Ak majú dve $m \times n$ matice A a B rovnakú hodnosť, potom sa dá A previesť na B pomocou nejakej postupnosti elementárnych riadkových operácií (ERO).

f) Vo vektorovom priestore $n \times n$ matíc $M_{n,n}(\mathbb{R})$ tvorí množina $W_M = \{A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \,|\, AM = MA\}$, kde M je fixná matica z $M_{n,n}(\mathbb{R})$, podpriestor.

6. *(5 bodov)* Pre parametre $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ uvažujme $(n+1) \times (n+1)$ maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & u_2 \\ & & \ddots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & u_n \\ u_1 & u_2 & u_3 & \ldots & u_n & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Nájdite determinant matice A. Kedy je A regulárna?

b) Nájdite hodnotu algebraického doplnku A_{ii} pre $i = 1, \ldots, n, n+1$ (diagonálne zložky).

c) Nájdite hodnotu algebraického doplnku A_{ij} pre $i \neq j$ (mimodiagonálne zložky).