Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 1. marca 2010

---

1. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. (5.1.17) Nájdite tretí riadok matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

tak, aby jej charkateristický polynóm $\det(A - \lambda I)$ bol $-\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 6$.

3. (5.2.4) Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagolále zložky 1, 2 a 7, potom je diagonalizovateľná. Ako bude vyzerať matica Λ?

4. (5.2.7) Nájdite A^{100} ak $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

5. (5.2.11) Ak vlastné hodnoty 3×3 matice A sú $1, 1$ a 2, ktoré z nasledujúcich tvrdení sú zaručene pravdivé? Zdôvodnite v pravdivom prípade, nájdite protipríklad v nepravdivom.
a) A je invertibilná,
b) A je diagonalizovateľná,
c) A nie je diagonalizovateľná.

6. (5.2.12) *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A nie je invertibilná,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

7. (5.2.13) Pre nasledujúce matice výjde, že vlastné hodnoty matice A sú 1 a 9 a vlastné hodnoty matice B sú -1 a 9:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticovú druhú odmocninu matice A v tvare $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$. Prečo nemôže existovať druhá odmocnina pre maticu B s reálnymi zložkami?

8. (5.2.14) Ak A je diagonalizovateľná matica, nájdite iný dôkaz faktu, že determinant matice $A = S\Lambda S^{-1}$ je súčinom vlastných hodnôt matice A.

9. a) Kedy vlastné vektory pre vlastnú hodnotu $\lambda = 0$ generujú celý nulový priestor $\mathcal{N}(A)$?
b) Kedy generujú (všetky) vlastné vektory pre $\lambda \neq 0$ stĺpcový priestor $\mathcal{S}(A)$?

10. Mocniny A^k sa blížia k nule ak pre všetky $|\lambda_i| < 1$ a "utečú do nekonečna", ak pre nejaké $|\lambda_i| > 1$. Pre nasledujúce štyri príklady overte ich asymptotické správanie.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{1024}\| > 10^{700} \qquad B^{1024} = I \qquad C^{1024} = -C \qquad \|D^{1024}\| < 10^{-78}$$

Nájdite vlastné hodnoty $\lambda = e^{i\theta}$ pre matice B a C, ukážte pomocou toho, že $B^4 = I$ a $C^3 = -I$.

11. (5.3.3) Nech je každý člen postupnosti $\{G_k\}$ priemerom predchádzajucich dvoch, t.j. $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$. Nájdite príslušnú maticu (pomocou metódy popísanej v knižke) a zdiagonalizujte ju. Ak $G_0 = 0$ a $G_1 = \frac{1}{2}$ nájdite explicitný tvar pre člen G_k, tiež spočítajte limitu pre $k \to \infty$.

12. Nájdite explicitný tvar pre n-tý člen rekurentnej postupnosti $\{x_n\}$ danej vzťahom $x_{k+3} = 3x_{k+1} + 2x_k$ a začiatočnými podmienkami $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$.
Pozn.: Tentoraz bude treba diagonalizovať 3×3 maticu.