

Pre niektoré z nasledujúcich úloh budete potrebovať nasledujúce fakty:

Lineárna diferenciálna rovnica $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$ má všeobecné riešenie tvaru

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} y_n,$$

kde y_1, y_2, \dots, y_n sú vlastné vektory $n \times n$ matice A a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jej vlastné hodnoty. Koefficienty c_1, c_2, \dots, c_n sa vypočítajú zo začiatočnej podmienky $u_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$.

To isté sa dá zapísať aj ako $u(t) = e^{At} u_0$, kde $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$ a $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$. Alternatívne $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \dots$.

Na prednáške 9. marca 2010 sme sa (takmer) dostali k formulácii diferenciálnej rovnice pomocou matíc, dôkazy a podrobné zdôvodnenia budú na prednáške 16. marca 2010.

1. Každá permutačná matica necháva vektor $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ nezmenený. Preto jedna z jej vlastných hodnôt je $\lambda = 1$. Nájdite zvyšné vlastné hodnoty pre permutačnú maticu:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi $(1, 1, 1)^T$ (resp. $(1, 1, 1, 1)^T$)?

2. Pre maticu rotácie Q riešte charakteristickú rovnicu $\det(Q - \lambda I) = 0$ pomocou vzorca na korene kvadratickej rovnice a presvedčte sa, že $\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matica Q reprezentuje rotáciu \mathbb{R}^2 o uhol θ . Nájdite tiež vlastné vektory matice Q riešením (komplexnej) lineárnej rovnice $(Q - \lambda I)x = 0$.

3. Existuje reálna 2×2 matica, rôzna od I , ktorá spĺňa $A^3 = I$? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať $\lambda^3 = 1$, čo spĺňajú práve čísla $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akú stopu a determinant by teda mala matica A mať? Nájdite A .

4. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu e^{At} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžete vypočítať pomocou vzorca $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$ alebo sčítaním nekonečného radu $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

5. (5.4.2) Pre maticu A z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $du/dt = Au$. Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $u_0 = (3, 1)^T$. Aký je *rovnovážny stav* keď $t \rightarrow \infty$? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu; $\lambda = 0$ v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá $\lambda = 1$ v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti $e^{0t} = 1$).

6. (5.4.4) Ak P je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \dots$, že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

7. (5.4.5) Diagonálna matica, napr. $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, spĺňa rovnosť $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t} e^{\Lambda T}$, nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

a) zdôvodnite prečo platí $e^{A(t+T)} = e^{At} e^{AT}$, použijúc vzťah $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$,

b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah $e^{A+B} = e^A e^B$ na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov})$$

8. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre u'_1 , u'_2 a u'_3 a ukážte, že $u'_1 u_1 + u'_2 u_2 + u'_3 u_3 = 0$,

b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ je konštantná v čase,

c) nájdite vlastné hodnoty matice A .

Vektor riešení bude rotovať okolo osi $w = (a, b, c)^T$, nakoľko Au je *vektorový súčin* $u \times w$, ktorý je kolmý na u aj w .

9. Vychádzajúc zo vzorca $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj $\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$.

10. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín J^k . Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte e^{Jt} .

Skúste vypočítať mocniny J_n^k a exponenciálu $e^{J_n t}$ aj pre $n \times n$ maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$