Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 22. marca 2010

---

1. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov $z(t)$ a vlkov $v(t)$ spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\frac{dz}{dt} = 4z - 2v,$$

$$\frac{dv}{dt} = z + v.$$

a) Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)
b) Ak na začiatku máme $z_0 = 300$ a $v_0 = 200$, ako bude vyzerať stav populácií v čase t?
c) Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

2. Nech V je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$ dimenzie n. Ukážte, že V je $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor.

3. Komplexná $n \times n$ matica sa nazýva *hermitovská*, ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Ukážte, že hermitovské matice tvoria reálny vektorový podpriestor v priestore komplexných matíc $M_{n,n}(\mathbb{C})$, nájdite jeho bázu a určite jeho dimenziu. Ukážte tiež, že hermitovské matice netvoria komplexný vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

4. (5.5.2) Čo sa dá povedať o:
i) súčte komplexného čísla s číslom s ním združeným?
ii) komplexnom združení čísla na jednotkovej kružnici?
iii) súčine dvoch čísel z jednotkovej kružnice?
iv) súčte dvoch čísel z jednotkovej kružnice?

5. (5.5.4) Nájdite hodnoty a a b pre komplexné čísla $a + ib$ na jednotkovej kružnici, ktorých argument zodpovedá uhlom $\theta = 30°$, $60°$, $90°$. Overte, že druhá mocnina prvého z nich sa rovná druhému a jeho tretia mocnina tretiemu.

6. (5.5.22) Pre každú komplexnú maticu Z vieme nájsť rozklad na jej hermitovskú a anti-hermitovskú časť: $Z = A + K$. Podobne ako pri rozklade komplexného čísla $z = a + ib$ dostaneme jeho reálnu časť ako $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, môžeme uvažovať "reálnu časť" matice Z ako polovicu $Z + Z^H$. Nájdite vzorec pre "imaginárnu časť" K a nájdite rozklady $A + K$ pre nasledujúce matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

Pozn. Komplexná matica K sa nazýva *anti-hermitovská* (alebo aj *koso-hermitovská*), ak ak pre všetky i, j platí $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

7. (5.5.7) Napíšte maticu A^H a spočítajte $C = A^H A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi C a C^H? Platí niečo podobné pre každú maticu C, ktorá sa dá zapísať ako $A^H A$?

8. (5.5.9) a) Ako súvisí determinant matice A^H s determinantom matice A?
b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice je reálne číslo.

9.* (5.4.17) Ak do rovnice kmitania pridáme aj lineárny člen fx' zodpovedajúci tlmeniu spôsobenému trecím odporom (napr. kmitanie vo viskóznej kvapaline), dostaneme rovnicu tlmeného oscilátora

$$x'' + fx' + \omega^2 x = 0.$$

Prepíšte takúto rovnicu do maticového tvaru $u' = Au$ a nájdite riešenie v tvare $u(t) = e^{At} u_0$.

Vysvetlite kvalitatívny rozdiel riešení pre $f < 2\omega$ a $f > 2\omega$.