Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 19. apríla 2010

1. (5.6.2) Opíšte slovne všetky matice, ktoré sú podobné matici $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ a nájdite zopár príkladov.

2. (5.6.3) Vysvetlite, prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A+I$.

3. (5.6.4) Nájdite diagonálnu maticu M, ktorej zložky sú 1 a -1, tak aby matice A a B boli podobné.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

5. (5.6.6) a) Ak $CD = -DC$ a D je invertibilná, ukážte, že potom je C podobná $-C$.
b) Odvoďte z toho, že vlastné hodnoty matice C musia existovať v pároch s opačnými znamienkami.
c) Ukážte priamym výpočtom, že ak $Cx = \lambda x$, potom $C(Dx) = -\lambda(Dx)$.

6. (5.6.8 a 9) Aká matica zodpovedá zmene báz z $v_1 = (1,1)$ a $v_2 = (1,4)$ na $w_1 = (2,5)$ a $w_2 = (1,4)$? Stĺpce matice M dostaneme tak, že vyjadríme v_1 a v_2 ako kombináciu w_1 a w_2.

Vyjadrite vektor $(3,9)$ ako kombináciu $c_1v_1 + c_2v_2$, aj ako kombináciu $d_1w_1 + d_2w_2$. Overte, že matica M naozaj prevádza c na d: $Mc = d$.

7. Nájdite všetky ortogonálne 2×2 matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a -1. Akú transformáciu roviny $\mathbb{R}^2$ reprezentujú?

8. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q, tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.
b) Overte, že $P = x_1x_1^T + x_2x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry.

9. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti–Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

10. (5.6.19) Predpokladajme, že T je 3×3 horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij}. Porovnajte zložky TT^H a T^HT a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.

11. (5.6.20) Ukážte, že ak je N normálna matica, potom $||Nx|| = ||N^Hx||$ pre každý vektor x. Odvoďte z toho, že i-ty riadok matice N má rovnakú dĺžku ako i-ty stĺpec matice N.

Pozn.: Ak je N navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že N musí byť diagonálna.

12. (5.6.23) Ak má matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3, čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3I)(A-\lambda_2I)(A-\lambda_1I)$? Čo to bude za matica?

13. Nájdite 3×3 maticu, pre ktorú má nula ako vlastná hodnota algebraickú násobnosť 3 a geometrickú násobnoť 1.

14. (5.6.27) Majme maticu A, pre ktorú $a_{ij} = 1$ pre zložky nad hlavnou diagonálou ($i < j$) a $a_{ij} = 0$ pre všetky ostatné ($i \geq j$). Nájdite jej vlastné vektory (napr. pre prípad 4×4), ako aj vektory spĺňajúce rovnice typu $Ax_{i+1} = x_i$, kde x_1 je vlastný vektor.

15. (5.R.3,4) Ak má matica A vlastné hodnoty 0 a 1, zodpovedajúce vlastným vektorom $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, prečo sa dá vopred, bez jej výpočtu, povedať že bude symetrická? Ako bude A vyzerať?
Aké budú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A^2? Aký je vzťah medzi A a A^2?

16. (5.R.5) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c? Nájdite reálnu maticu A takú, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.