Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 10. mája 2009, resp. cvičenia ako príprava na skúšku

---

1. (6.2.1) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

2. (6.2.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

3. (6.2.4) S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica A kladne definitná, potom sú aj matice A^2 a A^{-1} kladne definitné.

4. (6.2.5) Ukážte, že ak sú matice A a B kladne definitné, potom je takou aj matica $A+B$. Ktoré z kritérií kladnej definitnosti I – IV sa hodí v tomto prípade?

5. (6.2.6) Použitím pivotov, vlastných hodnôt a vlastných vektorov matice $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ zapíšte A v tvare $R^T R$ všetkými troma spôsobmi z prednášky – $(LD^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}L^T)$, $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$, a $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$.

6. (6.2.8) Ak je matica A symetrická a kladne definitná a C je regulárna, ukážte, že matica $B = C^T AC$ je tiež symetrická a kladne definitná.

7. (6.2.9) Ak sa matica A dá napísať ako $R^T R$, dokážte, že platí zovšeobecnená Cauchy–Schwarzova nerovnosť $|x^T Ay|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$.

8. (6.2.10) Elipsa $u^2+4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ (pozri príklad č. 5).

9. (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezenutje elipsoid pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

10. (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby 3×3 matica A bola *záporne definitná* (matica $-A$ je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu $\det A$ a $\det(-A)$.

11. (6.2.16) *Pravda/Nepravda* Ak je matica A symetrická kladne definitná a Q je ortogonálna, potom:
a) $Q^T AQ$ je diagonálna matica,
b) $Q^T AQ$ je symetrická kladne definitná matica,
c) $Q^T AQ$ má rovnaké vlastné hodnoty ako A,
d) e^{-A} je symetrická kladne definitná matica.

12. (6.2.17) Ak je matica A kladne definitná a zväčšíme v nej zložku a_{11}, ukážte pomocou Laplaceovho rozvoja, že aj jej determinant sa zvýši. Nájdite príklad indefinitnej matice, kde toto nebude pravda.

13. (6.2.18) Z rozkladu $A = R^T R$ ukážte, že pre kladne definitné matice platí $\det A \leq a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
Pomôcka: Druhá mocnina dĺžky j-teho stĺpca matice R bude práve zložka a_{jj} v matici A, tiež treba použiť vzťah *determinant = objem*.

14. (6.2.19)(*L'japunovov test stability*) Predpokladajme, že $AM + M^H A = -I$ pre nejakú kladne definitnú maticu A. Ak $Mx = \lambda x$, ukážte, že $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
Pomôcka: Vynásobte maticovú rovnosť x^H a x.

15. (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 2)} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 1)}$$

vyjadrite $x^T Ax$ ako súčet dvoch štvorcov a $x^T Bx$ ako jeden štvorec.

16. (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

17. (6.3.4) Je pravdou, že ak sú všetky pivoty matice väčšie ako 1, potom aj jej vlastné hodnoty sú väčšie ako 1? Overte na tridiagonálnych maticiach s diagonálami -1, 2, -1.

18. (6.3.6) Algebraický dôkaz Silvestrovho zákona zotrvačnosti prebieha nasledovne.
Rovnako ako na prednáške predpokladáme, že A a $C^T AC$ nemajú nulové vlastné hodnoty. Potom nech $x_1, \ldots, x_p$ sú ortonormálne vlastné vektory matice A zodpovedajúce kladným vlastným hodnotám $\lambda_i > 0$, $y_1, \ldots, y_q$ sú ortonormálne vlastné vektory matice $C^T AC$ zodpovedajúce záporným vlastným hodnotám $\mu_i < 0$.
a) Aby sme ukázali, že vektory $x_1, \ldots, x_p, Cy_1, \ldots, Cy_q$ sú lineárne nezávislé, predpokladajme, že nejaká ich kombinácia dá nulu:

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b_1Cy_1 + \cdots + b_qCy_q (= z, \text{povedzme}).$$

Ukážte, že $z^T Az = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$ a tiež $z^T Az = \mu_1 b_1^2 + \cdots + \mu_q b_q^2 \leq 0$.
b) Odvoďte z toho, že všetky a_i aj b_i musia byť nulové, čo znamená lineárnu nezávislosť. Z toho ukážte, že $p + q \leq n$.
c) Rovnaký argument môžme použiť pre $n - p$ záporných vlastných hodnôt matice A a $n - q$ kladných vlastných hodnôt matice $C^T AC$. To dá $n - p + n - q \leq n$. Ukážte, že potom $p + q = n$ a zákon zotrvačnosti naozaj platí.

19. (6.3.7) Ak je C regulárna matica, ukážte, že A a $C^T AC$ majú rovnakú hodnosť. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

20. (6.3.8) Experimentovaním zistite signatúru $2n \times 2n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde B je regulárna $n \times n$ matica.

21. Nech A je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

22. Nech $M_{n,n}$ označuje vektorový priestor reálnych matíc typu $n \times n$. Ukážte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ je kladne definitná symetrická bilineárna forma na $M_{n,n}$ – t.j. je to skalárny súčin (Pozn. tr značí stopu – súčet diagonálnych zložiek matice). Nájdite ortonormálnu bázu priestoru matíc vzhľadom na túto formu, povedzme pre $n = 2, 3$.