

1. (5.1.5) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Overte, že súčet  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$  sa rovná stope matice a súčin  $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$  sa rovná determinantu.

2. (5.1.7) Predpokladajme, že  $\lambda$  je vlastná hodnota matice  $A$  a  $x$  je príslušný vlastný vektor, t.j.  $Ax = \lambda x$ .

(a) Ukážte, že  $x$  je tiež vlastným vektorom matice  $B = A - cI$ , kde  $c \in \mathbb{R}$ . Nájdite vlastnú hodnotu príslúchajúcu vektoru  $x$ .

(b) Predpokladajme, že  $\lambda \neq 0$ . Ukážte, že potom je  $x$  vlastným vektorom matice  $A^{-1}$  a nájdite vlastnú hodnotu.

3. (5.1.14) Nájdite hodnotu a všetky štyri vlastné hodnoty pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aké vlastné vektory zodpovedajú nenulovým vlastným hodnotám?

4. (5.1.11) Ukážte, že  $A$  a  $A^T$  majú rovnaké vlastné hodnoty porovnaním ich charakteristických polynómov.

5. (5.1.10) (a) Skonstruujte  $2 \times 2$  matice  $A$  a  $B$  také, že vlastné hodnoty súčinu  $AB$  nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne vlastné hodnoty  $A + B$  nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.

(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice  $A + B$  rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ , podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

6. (5.1.12) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre maticu  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$ .