Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 7

Cvičenia v týždni 4. apríla 2011

---

1. Ak $A + iB$ je unitárna matica (A aj B sú reálne matice), ukážte, že $Q = \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right]$ je ortogonálna matica.

2. Ak $A = R + iS$ je hermitovská matica, budú reálne matice R a S symetrické?

3. (5.R.19) Ak je matica K anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite Q pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.

4. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

5.(5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3, spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.
b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice $A = S\Lambda S^{-1}$: Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) \ldots (A - \lambda_n I) = 0$.

6. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.

7. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

8. (5.6.2) Opíšte slovne všetky matice, ktoré sú podobné matici $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ a nájdite zopár príkladov.

9. Nájdite všetky ortogonálne 2×2 matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a -1. Akú transformáciu roviny $\mathbb{R}^2$ reprezentujú?

10. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q, tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.
b) Overte, že $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry. Vysvetlite.

11. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti–Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

12. (5.6.19) Predpokladajme, že T je 3×3 horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij}. Porovnajte zložky TT^H a $T^H T$ a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.