Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 2. mája 2011

---

1. Predpokladajme, že nenulové vektory $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ spĺňajú rovnosti $Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$ pre $i = 1, \ldots, k-1$ a $Ax_0 = \lambda x_0$, teda ide o reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastnú hodnotu λ. Ukážte, že $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sú lineárne nezávislé. Ukážte tiež, že $k \leq n$.

2. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar 5×5 matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice J.)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar J.

3. (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice "nahliadnutím" - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru J pre maticu A s exponentami d_i vo faktorizácii minimálneho polynómu $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \ldots (x - \lambda_m)^{d_m}$? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice A?

5. (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar a pokúste sa nájsť aj maticu M z rovnosti $A = MJM^{-1}$. (v prípade nejasností pozrite Appendix B v knižke)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. (B.3) Pre maticu B z predchádzajúceho príkladu nájdite e^{Bt} ako $Me^{Jt}M^{-1}$ a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \cdots$.

7. (B.6) Pre maticu B (vlastné hodnoty 1, 1, 1 a -1) nájdite jej Jordanov tvar a aj maticu M z rovnosti $B = MJM^{-1}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (B.7) Predpokladajme, že matica A spĺňa rovnicu $A^2 = A$. Ukážte, že jej Jordanov tvar $J = M^{-1}AM$ tiež spĺňa $J^2 = J$. Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že $J_i^2 = J_i$ pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok J_i musí byť veľkosti 1×1 a $J_i = [\,0\,]$ alebo $J_i = [\,1\,]$. Inými slovami, A je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.

Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou A? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?

Definícia Hovoríme, že reálna symetrická matica A je kladne definitná, ak tzv. *kvadratická forma* $f(x) = x^T Ax$ spĺňa $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$ a rovnosť nastáva len pre $x = 0$.

9. (6.1.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, a pre každú z nich roznásobte kvadratickú formu $f = x^T Ax$:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$.

Determinant v časti b) je nulový; pozdĺž ktorej priamky bude forma f nulová?

10. (6.1.3) Ak 2×2 matica $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ spĺňa podmienku $a > 0$ a $ac > b^2$, nájdite vlastné hodnoty ako korene charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ a ukážte, že sú obe kladné.

Pripomenutie faktu: ak pre symetrickú maticu ($A^T = A$) spravíme LDU rozklad, v skutočnosti dostaneme rozklad $A = LDL^T$. Použite v nasledujúcich príkladoch.

11. (6.1.5) a) Pre aké hodnoty parametra b je matica $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{smallmatrix}\right]$ kladne definitná?
b) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ pre b z intervalu kladnej definitnosti.
c) Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $\frac{1}{2}(x^2 + 2bx + 9y^2) - y$ pre b z tohto intervalu.
d) Aké je minimum pre $b = 3$?

12. (6.1.7) a) Nájdite 3×3 matice A_1, A_2 zodpovedajúce kvardatickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$
$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma f_1 sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je f_1 rovná nule?
c) Nájdite rozklad A_2 ako LL^T (L je dolná trojuholníková matica). Vyjadrite f_2 ako súčet troch štvorcov.

13. (6.1.9) Kvadratická forma $f = 3(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2$ je kladne definitná. Nájdite jej maticu A, rozložte ju ako LDL^T a vysvetlite súvislosť zložiek matíc D a L s pôvodným tvarom formy f.