Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 2

Cvičenia v týždni 27. februára 2012

---

1. (5.2.4) Ukážte, že ak má horná trojuholníková 3×3 matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je diagonalizovateľná. Ako bude vyzerať matica Λ?

2. (5.2.12) *(Pravda/Nepravda)* Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice A sú násobky vektora $x = (1, 0, 0)$.
a) A nie je invertibilná,
b) A má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
c) A nie je diagonalizovateľná.

3. (5.2.13) Pre nasledujúce matice výjde, že vlastné hodnoty matice A sú 1 a 9 a vlastné hodnoty matice B sú -1 a 9:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticovú druhú odmocninu matice A v tvare $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$. Prečo nemôže existovať druhá odmocnina pre maticu B s reálnymi zložkami?

4. (5.2.14) Ak A je diagonalizovateľná matica, nájdite iný dôkaz faktu, že determinant matice $A = S\Lambda S^{-1}$ je súčinom vlastných hodnôt matice A.

5. a) Kedy vlastné vektory pre vlastnú hodnotu $\lambda = 0$ generujú celý nulový priestor $\mathcal{N}(A)$?
b) Kedy generujú (všetky) vlastné vektory pre $\lambda \neq 0$ stĺpcový priestor $\mathcal{S}(A)$?

6. Mocniny A^k sa blížia k nule ak pre všetky $|\lambda_i| < 1$ a "utečú do nekonečna", ak pre nejaké $|\lambda_i| > 1$. Pre nasledujúce štyri príklady overte ich asymptotické správanie.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{1024}\| > 10^{700} \qquad B^{1024} = I \qquad C^{1024} = -C \qquad \|D^{1024}\| < 10^{-78}$$

Nájdite vlastné hodnoty $\lambda = e^{i\theta}$ pre matice B a C, ukážte pomocou toho, že $B^4 = I$ a $C^3 = -I$.

7. (5.3.3) Nech je každý člen postupnosti $\{G_k\}$ priemerom predchádzajucich dvoch, t.j. $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$. Nájdite príslušnú maticu (pomocou metódy popísanej v knižke) a zdiagonalizujte ju. Ak $G_0 = 0$ a $G_1 = \frac{1}{2}$ nájdite explicitný tvar pre člen G_k, tiež spočítajte limitu pre $k \to \infty$.

8. Nájdite explicitný tvar pre n-tý člen rekurentnej postupnosti $\{x_n\}$ danej vzťahom $x_{k+3} = 3x_{k+1} + 2x_k$ a začiatočnými podmienkami $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ a $x_2 = -2$.
Pozn.: Tentoraz bude treba diagonalizovať 3×3 maticu.

9. (5.R.9) Čo sa bude diať vo Fibonacciho postupnosti, ak pôjdeme "späť v čase" a ako F_{-k} súvisí s F_k? Rekurentný vzorec $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ stále platí, preto $F_{-1} = 1$.

10. (5.R.11) Nech P je projekčná matica, ktorá zobrazuje $\mathbb{R}^n$ kolmo na podpriestor S. Vysvetlite prečo je každý vektor z S vlastným vektorom, podobne prečo je každý vektor z $S^\perp$ vlastným vektorom. Aké vlastné hodnoty im prislúchajú? (Všimnite si, že z rovnosti $P^2 = P$ vyplýva $\lambda^2 = \lambda$.)

11. (5.R.16) Presvedčte sa, že maticová rovnica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

nemá riešenie, teda matica A nemá odmocninu. Zmeňte diagonálne zložky matice A na 4 a nájdite odmocninu pre takúto maticu.

12. Predpokladajme, že matice A a B sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou S, teda máme $A = S\Lambda_1 S^{-1}$ a $B = S\Lambda_2 S^{-1}$. Ukážte, že potom matice A a B komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu AB sú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B. Ako je to s vlastnými vektormi?

13. Predpokladajme, že každá z matíc A a B má n rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice A a B komutujú. Ukážte potom, že ak x je vlastný vektor matice A, potom je aj vlastným vektorom matice B. Výjdite z rovnosti $ABx = BAx$.

Pozn. Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice A, matice A a B majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu S. Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 12, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.