Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 8

Cvičenia v týždni 16. apríla 2012

---

1. (5.6.3) Vysvetlite, prečo matica A nemôže byť nikdy podobná matici $A+I$.

2. (5.6.4) Nájdite diagonálnu maticu M, ktorej zložky sú 1 a -1, tak aby matice A a B boli podobné.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. (5.6.2) Opíšte slovne všetky matice, ktoré sú podobné matici $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$ a nájdite zopár príkladov.

4. (5.6.6) a) Ak $CD = -DC$ a D je invertibilná, ukážte, že potom je C podobná $-C$.
b) Odvoďte z toho, že vlastné hodnoty matice C musia existovať v pároch s opačnými znamienkami.
c) Ukážte priamym výpočtom, že ak $Cx = \lambda x$, potom $C(Dx) = -\lambda(Dx)$.

5. (5.6.8 a 9) Aká matica zodpovedá zmene báz z $v_1 = (1,1)$ a $v_2 = (1,4)$ na $w_1 = (2,5)$ a $w_2 = (1,4)$? Stĺpce matice M dostaneme tak, že vyjadríme v_1 a v_2 ako kombináciu w_1 a w_2.

Vyjadrite vektor $(3,9)$ ako kombináciu $c_1v_1 + c_2v_2$, aj ako kombináciu $d_1w_1 + d_2w_2$. Overte, že matica M naozaj prevádza c na d: $Mc = d$.

6. (5.6.23) Ak má 3×3 matica A vlastné hodnoty λ_1, λ_2 a λ_3, čo budú vlastné hodnoty matice $(A - \lambda_3 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_1 I)$? Čo to bude za matica?

7. (5.6.27) Majme maticu A, pre ktorú $a_{ij} = 1$ pre zložky nad hlavnou diagonálou $(i < j)$ a $a_{ij} = 0$ pre všetky ostatné $(i \geq j)$. Nájdite jej vlastné vektory (napr. pre prípad 4×4), ako aj vektory spĺňajúce rovnice typu $Ax_{i+1} = x_i$, kde x_1 je vlastný vektor.

8. (5.R.3,4) Ak má matica A vlastné hodnoty 0 a 1, zodpovedajúce vlastným vektorom $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ a $\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, prečo sa dá vopred, bez jej výpočtu, povedať že bude symetrická? Ako bude A vyzerať?

Aké budú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A^2? Aký je vzťah medzi A a A^2?

9. (5.R.25) a) Nájdite nenulovú maticu N, takú aby $N^3 = 0$.
b) Ukážte, že ak $Nx = \lambda x$, potom λ musí byť nula.
c) Dokážte, že N (ktorá sa nazýva *nilpotentná*) nemôže byť symetrická.

10. Nech A je nilpotentná matica (t.j. $A^k = 0$ pre nejaké k). Ukážte, že $\det(A+I) = 1$.

11. Dokážte alebo vyvráťte: matica A typu $n \times n$ je antisymetrická práve vtedy, keď $x^T A x = 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$.

12. Nech A je reálna symetrická matica, t.j. $A^T = A$. Ukážte, že ak $x \in \mathbb{C}^n$ je jej *komplexný* vlastný vektor, potom aj $\bar{x}$ je vlastný vektor matice A. Overte, že $x + \bar{x}$ bude patriť do $\mathbb{R}^n$. Za akých podmienok pôjde o *reálny* vlastný vektor matice A?

13. Nech K je reálna antisymetrická matica, t.j. $K^T = -K$. Ukážte, že ak $x \in \mathbb{C}^n$ je jej *komplexný* vlastný vektor pre vlastnú hodnotu $i\lambda$, potom aj $\bar{x}$ je vlastný vektor matice K. Overte, že $x + \bar{x}$ a $i(x - \bar{x})$ budú patriť do $\mathbb{R}^n$.

Ukážte, že $K(x + \bar{x}) = \lambda i(x - \bar{x})$ a $Ki(x - \bar{x}) = -\lambda(x + \bar{x})$.

Odvoďte z toho, že reálna antisymetrická matica K bude podobná (nad $\mathbb{R}$) tzv. blokovo diagonálnej matici s blokmi tvaru $\left[\begin{smallmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Sú navyše vektory $x + \bar{x}$ a $i(x - \bar{x})$ na seba kolmé?