Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 7. mája 2012
Väčšina potrebnej teórie o kvadratických formách bude až na prednáške 10.5.2012.
Pred pondelkovým cvičením si môžete zbežne pozrieť úvod kapitoly 6 v Strangovi

---

1. (6.2.1) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

2. (6.2.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

3. (6.2.4) S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica A kladne definitná, potom sú aj matice A^2 a A^{-1} kladne definitné.

4. (6.2.5) Ukážte, že ak sú matice A a B kladne definitné, potom je takou aj matica $A+B$. Ktoré z kritérií kladnej definitnosti I – IV sa hodí v tomto prípade?

5. (6.2.6) Použitím pivotov, vlastných hodnôt a vlastných vektorov matice $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ zapíšte A v tvare R^TR všetkými troma spôsobmi z prednášky – $(LD^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}L^T)$, $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$, a $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$.

6. (6.2.8) Ak je matica A symetrická a kladne definitná a C je regulárna, ukážte, že matica $B = C^TAC$ je tiež symetrická a kladne definitná.

7. (6.2.10) Elipsa $u^2+4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ (pozri príklad č. 5).

8. (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezenutje elipsoid pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

9. (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby 3×3 matica A bola *záporne definitná* (matica $-A$ je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu $\det A$ a $\det(-A)$.

10. (6.2.16) *Pravda/Nepravda* Ak je matica A symetrická kladne definitná a Q je ortogonálna, potom:
a) Q^TAQ je diagonálna matica,
b) Q^TAQ je symetrická kladne definitná matica,
c) Q^TAQ má rovnaké vlastné hodnoty ako A,
d) e^{-A} je symetrická kladne definitná matica.

11. (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 2)} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 1)}$$

vyjadrite x^TAx ako súčet dvoch štvorcov a x^TBx ako jeden štvorec.

12. (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$