Lineárna algebra a geometria II. – Úloha č. 0

Cvičenia v týždni 11. februára 2013

---

1. (5.1.5) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre matice
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Overte, že súčet $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$ sa rovná stope matice a súčin $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$ sa rovná determinantu.

2. (5.1.7) Predpokladajme, že λ je vlastná hodnota matice A a x je príslušný vlastný vektor, t.j. $Ax = \lambda x$.
(a) Ukážte, že x je tiež vlastným vektorom matice $B = A - cI$, kde $c \in \mathbb{R}$. Nájdite vlastnú hodnotu prislúchajúcu vektoru x.
(b) Predpokladajme, že $\lambda \neq 0$. Ukážte, že potom je x vlastným vektorom matice A^{-1} a nájdite vlastnú hodnotu.

3. (5.1.14) Nájdite hodnosť a všetky štyri vlastné hodnoty pre matice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$
Aké vlastné vektory zodpovedajú nenulovým vlastným hodnotám?

4. (5.1.11) Ukážte, že A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty porovnaním ich charakteristických polynómov.

5. (5.1.10) (a) Skonštruujte 2×2 matice A a B také, že vlastné hodnoty súčinu AB nebudú súčinom vlastných hodnôt matíc A a B, podobne vlastné hodnoty $A + B$ nebudú súčtom jednotlivých vlastných hodnôt.
(b) Overte, že napriek tomu sa súčet vlastných hodnôt matice $A + B$ rovná súčtu všetkých vlastných hodnôt matíc A a B, podobne pre súčiny. Prečo je to tak?

6. (5.1.12) Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory pre maticu $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$.