

1. (5.3.4) Biológ H. Bernadelli (1941) študoval tzv. populačné vlny a ako model opísal chrobáka, "ktorý žije tri roky a rozmnožuje sa v treťom roku života". Ak chrobák prežije prvý rok s pravdepodobnosťou $\frac{1}{2}$, druhý s pravdepodobnosťou $\frac{1}{3}$ a v treťom roku splodí šesť samičiek, matica opisujúca medziročnú zmenu populácie bude

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že $A^3 = I$ a sledujte populáciu chrobákov po dobu šesť rokov začínajúc v prvom roku s 3000 chrobákmi v každej vekovej skupine.

2. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

3. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty y_k a z_k pre $k \rightarrow \infty$ ak

$$y_{k+1} = 0.8y_k + 0.3z_k \quad y_0 = 0$$

$$z_{k+1} = 0.2y_k + 0.7z_k \quad z_0 = 5.$$

Tiež nájdite formuly pre y_k a z_k použijúc $A^k = SA^kS^{-1}$.

4. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Stahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fiľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fiľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte 3×3 maticu prechodu A a nájdite stály stav u_∞ zodpovedajúci vlastnej hodnote $\lambda = 1$.

5. (5.3.12) Ak A je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora Ax sa rovná súčtu zložiek vektora x . Odvodte z toho, že ak $Ax = \lambda x$ pre $\lambda \neq 1$, potom súčet zložiek vlastného vektora x je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

6. Ak A je Markovovská matica, ukážte, že vektor $(1, 1, \dots, 1)^T$ je vlastný vektor matice A^T pre $\lambda = 1$. Keďže vieme, že matice A a A^T majú rovnaké vlastné hodnoty, toto je alternatívny dôkaz toho, že jednotka je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice.

7. (5.R.7) Čo by ste uprednostnili – 50%-ný úrok (p.a) pripisovaný raz ročne, 44%-ný úrok (p.a) pripisovaný štvrťročne alebo 42%-né (p.a) spojitý úročené?

8. Každá permutačná matica necháva vektor $x = (1, 1, \dots, 1)^T$ nezmenený. Preto jedna z jej vlastných hodnôt je $\lambda = 1$. Nájdite zvyšné vlastné hodnoty pre permutačné matice:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi $(1, 1, 1)^T$ (resp. $(1, 1, 1, 1)^T$)?

9. Pre maticu rotácie Q riešte charakteristickú rovnicu $\det(Q - \lambda I) = 0$ pomocou vzorca na korene kvadratickej rovnice a presvedčte sa, že $\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matica Q reprezentuje rotáciu \mathbb{R}^2 o uhol θ . Nájdite tiež vlastné vektory matice Q riešením (komplexnej) lineárnej rovnice $(Q - \lambda I)x = 0$.

10. Existuje reálna 2×2 matica, rôzna od I , ktorá spĺňa $A^3 = I$? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať $\lambda^3 = 1$, čo spĺňajú práve čísla $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ a $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Akú stopu a determinant by teda mala matica A mať? Nájdite A .

11. (*príklad zo života, na percentá*) Pri výstavbe diaľnice D1 sa mali použiť tzv. PPP projekty, v súčasnosti sa opäť uvažuje o ich použití pri výstavbe iných úsekov. Na úsek Hričovské Podhradie – Dubná Skala (dĺžka 24,8 km + privádzač v dĺžke 4,25 km), ktorý v sebe zahŕňa aj obojsmerné tunely Ovčiarsko (cca. 2360 m), Žilina (cca. 690 m) a Višňové (cca. 7520 m) predstavovala v roku 2009 dohodnutá cena za stavebné práce 1,94 mld. Eur a následné splátky sa odhadovali na celkovú výšku 8,545 mld. Eur. Táto suma v sebe mala zahŕňať aj údržbu, prevádzku a rekonštrukciu počas najbližších 30 rokov.

a) Odvodte vzorec pre výpočet celkovej výšky splátok hypotéky v trvaní 30 rokov pri fixnej úrokovej miere p . Pre jednoduchosť počítajte s jednou splátkou ročne, pred zaplatením ktorej sa zostávajúca dlžná suma prenásobí $(1 + p)$.

b) Odhadnite predraženie PPP projektov voči financovaniu priamo zo štátneho rozpočtu, resp. eurofondov. Vychádzajte z týchto parametrov: $p_{sr} = 4,2\%$, $p_{ppp} = 7,45\%$.

c) Odhadnite predraženie výstavby diaľničných tunelov na Slovensku z porovnania s výstavbou úsekov v Rakúsku (napr. A14 Rheintal Autobahn, Pfändertunnel – 6,7 km za 212 mil. Eur, A9 Pyhrn Autobahn, Bosrucktunnel – 7,3 km za 282 mil. Eur a pod.)

d) Koľko bankových úradníkov by bolo možné počas najbližších 30 rokov zamestnať z rozdielu finančných nákladov medzi p_{sr} a p_{ppp} ? (uvažujte plat vo výške štvornásobku priemernej mzdy, nezabudnite na odvody, odhadnite nárast priemernej mzdy do budúcnosti).¹

¹ Zdroje:

<http://www.silnice-zeleznice.cz/clanek/dialnica-d1-hricovske-podhradie-dubna-skala-ako-iii-balik-ppp/>

<http://zilina.sme.sk/c/5226839/zacali-vystavbu-najnarocnejšieho-useku-dialnice-d1.html>

<http://www.asfinag.at/strassennetz>