Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 9

Na týždne 22. a 29. apríla 2013

Písomka 30.4.2013 bude obsahovať témy z tejto úlohy, tak sa do nej pozrite skôr ako na cvičeniach 30.4.

---

**1.** Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a vektorový podpriestor $V \subset \mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $v_1 = (0,1,0,1)^T$ a $v_2 = (3,1,3,1)^T$. Ukážte, že lineárne zobrazenie $T$ dané maticou $A$ zobrazuje vektorový podpriestor $V$ sám na seba. Nájdite $2 \times 2$ maticu $A'$, ktorá opisuje lineárne zobrazenie $T : V \to V$ v báze $(v_1, v_2)$, nájdite jej vlastné hodnoty a príslušné vlastné vektory vo $V$.

Nájdite dvojrozmerný vektorový podpriestor $W \subset \mathbb{R}^4$, tak aby $W$ bol tiež invariantný vzhľadom na $T$, $V \cap W = \{0\}$ a $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

**2.** Matica $A$ sa nazýva *unipotentná* ak je matica $A - I$ nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice $A$. Čo budú jej vlastné hodnoty?

**3.** Majme matice $A$ a $B$. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že $AB$ a $BA$ majú rovnaké vlastné hodnoty.

*Pozn.:* porovnajte s príkladom č. 9 v domácej úlohe č. 7. Vedeli by ste nájsť také $A$ a $B$ aby matice $AB$ a $BA$ neboli podobné?

**4.** Nech $J$ a $J'$ sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde $\sigma$ je nejaká permutácia. Ukážte, že matice $J$ a $J'$ sú podobné.

*Pozn.* Maticu $J'$ dostaneme z $J$ poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov $e_i$.

**5.** *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.

a) Regulárna matica nemôže byť podobná singulárnej matici.

b) Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.

c) Matica $A$ nemôže byť podobná matici $-A$ okrem prípadu ak $A = 0$.

d) $A - I$ nemôže byť podobná matici $A + I$.

e) $A + I$ nemôže byť podobná matici $I - A$.

f) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.

g) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

**6.** Nech matice $A$ a $B$ sú podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$. Ukážte, že potom platí $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(B - \lambda I)^k$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$.

To, okrem iného znamená, že $A$ a $B$ majú rovnaké vlastné hodnoty – to sú práve $\lambda$ s nenulovými dimenziami $\mathcal{N}(A - \lambda I)$, ale aj rovnaké geometrické násobnosti vlastných hodnôt.

**7.** Ukážte, že ak sú matice $A$ a $B$ podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

Definícia minimálneho polynómu matice: $m_A(x) = x^k + m_{k-1}x^{k-1} + \cdots + m_1 x + m_0$ je taký nenulový polynóm, ktorý 'nuluje' maticu $A$, t.j. $m_A(A) = A^k + m_{k-1}A^{k-1} + \cdots + m_1 A + m_0 I = 0$ a súčasne je jeho stupeň $k$ najnižší možný.

**8.** Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica $J$ *nie je podobná* matici $K$:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \text{a} \qquad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu $M$ provnajte $JM$ a $MK$. Ak sa rovnajú, ukážte, že $M$ nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať. Aké sú minimálne polynómy matíc $J$ a $K$?

**9.** Nech $n \times n$ matica $A$ reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné podpriestory $V_\lambda$, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice $A$, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu $T$, t.j. $T(V_\lambda) = V_\lambda$.
Definícia zovšeobecneného vlastného podpriestoru: $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0 \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}\}$, resp. $V_\lambda = \bigcup_k \mathcal{N}(A - \lambda I)^k$.

**10.** Majme maticu $A$. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné vektorové priestory $V_{\lambda_1}$ a $V_{\lambda_2}$ prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám $\lambda_1$ a $\lambda_2$ majú triviálny prienik.

**11.** Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu $B$ nájdite aj jej Jordanov tvar.

**12.** Ukážte, že $A^T$ je vždy podobná matici $A$. Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.
a) Pre $A$ skladajúcu sa z jedného bloku $J_i$ nájdite maticu $M_i$ takú aby $M_i^{-1} J_i M_i = J_i^T$.
b) Pre $A$ v Jordanovom tvare poskladajte maticu $M_0$ z menších blokov tak, aby $M_0^{-1} J M_0 = J^T$.
c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že $A^T$ je podobná $J^T$ a tým pádom aj $J$ a $A$.

**13.** Nech $A$ je komplexná $n \times n$ matica spĺňajúca $A^k = I$ pre nejaké $k$. Aké môžu byť vlastné hodnoty matice $A$? Ukážte, že $A$ je diagonalizovateľná (Aký môže byť Jordanov tvar matice $A$? Ako vyzerá trojuholníková $T$ zo Schurovej lemmy?).

**14.** Predpokladajme, že nenulové vektory $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$ spĺňajú rovnosti $Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$ pre $i = 1, \ldots, k-1$ a $Ax_0 = \lambda x_0$, teda ide o reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastnú hodnotu $\lambda$. Ukážte, že $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ sú lineárne nezávislé. Ukážte tiež, že $k \leq n$.

**15.** (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar $5 \times 5$ matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice $J$.)
Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar $J$.

**16.** (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice "nahliadnutím" - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

**17.** Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru $J$ pre maticu $A$ s exponentami $d_i$ vo faktorizácii minimálneho polynómu $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1}(x - \lambda_2)^{d_2} \ldots (x - \lambda_m)^{d_m}$? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice $A$?

**18.** (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar a pokúste sa nájsť aj maticu $M$ z rovnosti $A = MJM^{-1}$. (v prípade nejasností pozrite Appendix B v knižke)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**19.** (B.3) Pre maticu $B$ z predchádzajúceho príkladu nájdite $e^{Bt}$ ako $Me^{Jt}M^{-1}$ a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \cdots$.

**20.** (B.6) Pre maticu $B$ (vlastné hodnoty 1, 1, 1 a -1) nájdite jej Jordanov tvar a aj maticu $M$ z rovnosti $B = MJM^{-1}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**21.** (B.7) Predpokladajme, že matica $A$ spĺňa rovnicu $A^2 = A$. Ukážte, že jej Jordanov tvar $J = M^{-1}AM$ tiež spĺňa $J^2 = J$. Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že $J_i^2 = J_i$ pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok $J_i$ musí byť veľkosti $1 \times 1$ a $J_i = [\,0\,]$ alebo $J_i = [\,1\,]$. Inými slovami, $A$ je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.

Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou $A$? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?