

1. (6.2.9) Ak sa matica  $A$  dá napísať ako  $R^T R$ , dokážte, že platí zovšeobecnená Cauchy–Schwarzova nerovnosť  $|x^T A y|^2 \leq (x^T A x)(y^T A y)$ .

2. (6.2.17) Ak je matica  $A$  kladne definitná a zväčšíme v nej zložku  $a_{11}$ , ukážte pomocou Laplaceovho rozvoja, že aj jej determinant sa zväčší. Nájdite príklad indefinitnej matice, kde toto nebude pravda.

3. (6.2.18) Z rozkladu  $A = R^T R$  ukážte, že pre kladne definitné matice platí  $\det A \leq a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ .

*Pomôcka:* Druhá mocnina dĺžky  $j$ -teho stĺpca matice  $R$  bude práve zložka  $a_{jj}$  v matici  $A$ , tiež treba použiť vzťah *determinant = objem*.

4. (6.2.19) (*L'japunovov test stability*) Predpokladajme, že  $AM + M^H A = -I$  pre nejakú kladne definitnú maticu  $A$ . Ak  $Mx = \lambda x$ , ukážte, že  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ .

*Pomôcka:* Vynásobte maticovú rovnosť  $x^H$  a  $x$ .

5. (6.3.4) Je pravdou, že ak sú všetky pivoty matice väčšie ako 1, potom aj jej vlastné hodnoty sú väčšie ako 1? Overte na tridiagonálnych maticiach s diagonálami  $-1, 2, -1$ .

6. (6.3.6) Algebraický dôkaz Sylvestrovho zákona zotrvačnosti prebieha nasledovne.

Rovnako ako na prednáške predpokladáme, že  $A$  a  $C^T A C$  nemajú nulové vlastné hodnoty. Potom nech  $x_1, \dots, x_p$  sú ortonormálne vlastné vektory matice  $A$  zodpovedajúce kladným vlastným hodnotám  $\lambda_i > 0$ ,  $y_1, \dots, y_q$  sú ortonormálne vlastné vektory matice  $C^T A C$  zodpovedajúce záporným vlastným hodnotám  $\mu_i < 0$ .

a) Aby sme ukázali, že vektory  $x_1, \dots, x_p, C y_1, \dots, C y_q$  sú lineárne nezávislé, predpokladajme, že nejaká ich kombinácia dá nulu:

$$a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = b_1 C y_1 + \dots + b_q C y_q (= z, \text{ povedzme}).$$

Ukážte, že  $z^T A z = \lambda_1 a_1^2 + \dots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$  a tiež  $z^T A z = \mu_1 b_1^2 + \dots + \mu_q b_q^2 \leq 0$ .

b) Odvodte z toho, že všetky  $a_i$  aj  $b_i$  musia byť nulové, čo znamená lineárnu nezávislosť. Z toho ukážte, že  $p + q \leq n$ .

c) Rovnaký argument môžeme použiť pre  $n - p$  záporných vlastných hodnôt matice  $A$  a  $n - q$  kladných vlastných hodnôt matice  $C^T A C$ . To dá  $n - p + n - q \leq n$ . Ukážte, že potom  $p + q = n$  a zákon zotrvačnosti naozaj platí.

7. (6.3.7) Ak je  $C$  regulárna matica, ukážte, že  $A$  a  $C^T A C$  majú rovnakú hodnotu. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

8. (6.3.8) Experimentovaním zistíte signatúru  $2n \times 2n$  matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde  $B$  je regulárna  $n \times n$  matica.

9. Nech  $A$  je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

10. Nech  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  označuje vektorový priestor reálnych matíc typu  $m \times n$ . Ukážte, že  $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$  je kladne definitná symetrická bilineárna forma na  $M_{m,n}(\mathbb{R})$  – t.j. je to skalárny súčin (Pozn.  $\operatorname{tr}$  značí stopu – súčet diagonálnych zložiek matice). Nájdite ortonormálnu bázu priestoru matíc vzhľadom na túto formu, povedzme pre  $(m, n) = (2, 3)$ . Ako by sa situácia zmenila ak by sme definovali  $\langle A, B \rangle' = \operatorname{tr}(A B^T)$ ? Ako by sme dostali (hermitovský) skalárny súčin na komplexnom vektorovom priestore  $M_{m,n}(\mathbb{C})$ ?

**11.** Tzv. zovšeobecnený problém vlastných hodnôt je daný rovnicou  $Ax = \lambda Mx$ , kde  $A$  a  $M$  sú dve  $n \times n$  matice. Ukážte, že takéto  $\lambda$  sa dajú nájsť ako korene polynómu  $\det(A - \lambda M)$  stupňa  $n$  v premennej  $\lambda$ .

Predpokladajme navyše, že  $M = R^T R$ , t.j.  $M$  je kladne definitná. Zmenou súradníc  $y = Rx$  ukážte, že  $Ax = \lambda Mx$  práve vtedy, keď  $(R^T)^{-1} A R^{-1} y = \lambda y$ , t.j.  $\lambda$  je (obvyklou) vlastnou hodnotou matice  $(R^T)^{-1} A R^{-1} = C^T A C$ . (Pozri str. 343-345 v knižke)

**12.** Nech  $A$  je symetrická matica, jej vlastné hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sú zoradené vzostupne podľa veľkosti a k nim prislúchajú ortonormálne vlastné vektory  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Nájdite minimum a maximum výrazu

$$R(u) = \frac{u^T A u}{u^T u}, \quad \text{pre } u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0.$$

Využite fakt, že každé  $u \in \mathbb{R}^n$  sa dá zapísať ako  $u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$ . (pozri str. 348 – 350 v knižke)