Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 4

Cvičenia v týždni 17. marca 2014

Na prednáške som nestihol spraviť reklamu, ale toto som chcel:
`http://thales.doa.fmph.uniba.sk/niepel/LA/volby.html`

Pre niektoré z nasledujúcich úloh budete potrebovať tieto fakty:

Lineárna diferenciálna rovnica $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$ pre diagonalizovateľnú maticu A má všeobecné riešenie tvaru

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} y_n,$$

kde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sú vlastné vektory $n \times n$ matice A a $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ jej vlastné hodnoty. Koeficienty $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sa vypočítajú zo začiatočnej podmienky $u_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$.

To isté sa dá zapísať aj ako $u(t) = e^{At} u_0$, kde $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$ a $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \cdot & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$. Alternatívne $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \ldots$.

Na prednáške 11. marca 2014 sme sa nestihli dostať k formulácii diferenciálnej rovnice pomocou matíc a neodvodili vyššieuvedené vzorce. Skúsime to dohnať na prednáške 18. marca 2014.

1. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu e^{At} pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžte vypočítať pomocou vozrca $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$ alebo sčítaním nekonečného radu $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \ldots$

2. (5.4.2) Pre maticu A z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice $du/dt = Au$. Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku $u_0 = (3, 1)^T$. Aký je *rovnovážny stav* keď $t \to \infty$? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu; $\lambda = 0$ v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá $\lambda = 1$ v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti $e^{0t} = 1$).

3. (5.4.4) Ak P je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \ldots$, že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

4. (5.4.5) Diagonálna matica, napr. $\Lambda = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$, spĺňa rovnosť $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t} e^{\Lambda T}$, nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.
a) zdôvodnite prečo platí $e^{A(t+T)} = e^{At} e^{AT}$, použijúc vzťah $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$,
b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah $e^{A+B} = e^A e^B$ na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov)}$$

5. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

a) nájdite predpis pre u_1', u_2' a u_3' a ukážte, že $u_1' u_1 + u_2' u_2 + u_3' u_3 = 0$,
b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ je konštantná v čase,
c) nájdite vlastné hodnoty matice A.

Vektor riešení bude rotovať okolo osi $w = (a, b, c)^T$, nakoľko $u' = Au$ je *vektorový súčin* $u \times w$, ktorý je kolmý na u aj w.

6. Vychádzajúc zo vzorca $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$ zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$.

7. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín J^k. Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte e^{Jt}.

Skúste výpočítať mocniny J_n^k a exponenciálu $e^{J_n t}$ aj pre $n \times n$ maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

8. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov $z(t)$ a vlkov $v(t)$ spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\frac{dz}{dt} = 4z - 2v,$$
$$\frac{dv}{dt} = z + v.$$

a) Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)

b) Ak na začiatku máme $z_0 = 300$ a $v_0 = 200$, ako bude vyzerať stav populácií v čase t?

c) Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

9. (5.3.18) Vysvetlite (matematicky alebo ekonomicky), prečo zväčšenie ľubovoľnej zložky produkčnej matice A vedie k zväčšeniu $t_{max} = \lambda_1$, a teda k spomaleniu tempa rastu. (pozri dôkaz tvrdenia 5K na str. 271)

10.* (5.4.17) Ak do rovnice kmitania pridáme aj lineárny člen fx' zodpovedajúci tlmeniu spôsosbenému trecím odporom (napr. kmitanie vo viskóznej kvapaline), dostaneme rovnicu tlmeného oscilátora

$$x'' + fx' + \omega^2 x = 0.$$

Prepíšte takúto rovnicu do maticového tvaru $u' = Au$ a nájdite riešenie v tvare $u(t) = e^{At}u_0$.

Vysvetlite kvalitatívny rozdiel riešení pre $f < 2\omega$ a $f > 2\omega$.