# Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 5

Cvičenia v týždni 24. marca 2014

---

**1.** Nech $V$ je vektorový priestor nad poľom $\mathbb{C}$ dimenzie $n$. Ukážte, že $V$ je $2n$-rozmerný reálny vektorový priestor.

**2.** Komplexná $n \times n$ matica sa nazýva *hermitovská*, ak pre všetky $i, j$ platí $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Ukážte, že hermitovské matice tvoria reálny vektorový podpriestor v priestore komplexných matíc $M_{n,n}(\mathbb{C})$, nájdite jeho bázu a určite jeho dimenziu. Ukážte tiež, že hermitovské matice netvoria komplexný vektorový podpriestor v $M_{n,n}(\mathbb{C})$.

**3.** (5.5.2) Čo sa dá povedať o:
i) súčte komplexného čísla s číslom s ním združeným?
ii) komplexnom združení čísla na jednotkovej kružnici?
iii) súčine dvoch čísel z jednotkovej kružnice?
iv) súčte dvoch čísel z jednotkovej kružnice?

**4.** (5.5.4) Nájdite hodnoty $a$ a $b$ pre komplexné čísla $a + ib$ na jednotkovej kružnici, ktorých argument zodpovedá uhlom $\theta = 30°$, $60°$, $90°$. Overte, že druhá mocnina prvého z nich sa rovná druhému a jeho tretia mocnina tretiemu.

**5.** Nájdite všetky komplexné korene rovnice $z^n = 1$. Ukážte, že ak $\omega \neq 1$, potom $1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$. Pre ktoré $\omega$ budú aj jeho mocniny $\omega^2$, $\omega^3$, $\ldots \omega^{n-1}$ koreňmi rovnice?

**6.** (5.5.22) Pre každú komplexnú maticu $Z$ vieme nájsť rozklad na jej hermitovskú a anti-hermitovskú časť: $Z = A + K$. Podobne ako pri rozklade komplexného čísla $z = a + ib$ dostaneme jeho reálnu časť ako $\frac{1}{2}(z + \bar{z})$, môžeme uvažovať "reálnu časť" matice $Z$ ako polovicu $Z + Z^H$. Nájdite vzorec pre "imaginárnu časť" $K$ a nájdite rozklady $A + K$ pre nasledujúce matice:

$$Z = \begin{bmatrix} 3+i & 4+2i \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad Z = \begin{bmatrix} i & i \\ -i & i \end{bmatrix}.$$

*Pozn.* Komplexná matica $K$ sa nazýva *anti-hermitovská* (alebo aj *koso-hermitovská*), ak ak pre všetky $i, j$ platí $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

**7.** (5.5.7) Napíšte maticu $A^H$ a spočítajte $C = A^H A$ ak

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aký je vzťah medzi $C$ a $C^H$? Platí niečo podobné pre každú maticu $C$, ktorá sa dá zapísať ako $A^H A$?

**8.** (5.5.9) a) Ako súvisí determinant matice $A^H$ s determinantom matice $A$?
b) Dokážte, že determinant ľubovoľnej hermitovskej matice je reálne číslo.

**9.** Ukážte, že inverzná matica k hermitovskej (ak existuje) je opäť hermitovská.

**10.** (5.5.20) Diagonalizujte $2 \times 2$ anti-hermitovskú maticu $K = \left[\begin{smallmatrix} i & i \\ i & i \end{smallmatrix}\right]$. Spočítajte $e^{Kt} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ a overte, že $e^{Kt}$ je unitárna matica pre každú hodnotu parametra $t$. Čo bude $\frac{d}{dt}e^{Kt}$ pre $t = 0$?

**11.** Ako súvisia vlastné hodnoty matice $A^H$ s vlastnými hodnotami matice $A$?

**12.** Ak $A = R + iS$ je hermitovská matica, budú reálne matice $R$ a $S$ symetrické?

**13.** (5.R.19) Ak je matica $K$ anti-symetrická, ukážte, že matica $Q = (I - K)(I + K)^{-1}$ bude ortogonálna. Nájdite $Q$ pre $K = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$.