

1. (5.2.4) Ukážte, že ak má horná trojuholníková  $3 \times 3$  matica na diagonále zložky 1, 2 a 7, potom je diagonalizovateľná. Ako bude vyzerat matica  $\Lambda$ ?

2. (5.2.12) (*Pravda/Nepravda*) Predpokladajme, že jedinými vlastnými vektormi matice  $A$  sú násobky vektora  $x = (1, 0, 0)$ .

- $A$  nie je invertibilná,
- $A$  má viacnásobnú vlastnú hodnotu,
- $A$  nie je diagonalizovateľná.

3. (5.2.13) Pre nasledujúce matice výjde, že vlastné hodnoty matice  $A$  sú 1 a 9 a vlastné hodnoty matice  $B$  sú  $-1$  a 9:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Nájdite maticovú druhú odmocninu matice  $A$  v tvare  $R = S\sqrt{\Lambda}S^{-1}$ . Prečo nemôže existovať druhá odmocnina pre maticu  $B$  s reálnymi zložkami?

4. (5.2.14) Ak  $A$  je diagonalizovateľná matica, nájdite iný dôkaz faktu, že determinant matice  $A = SAS^{-1}$  je súčinom vlastných hodnôt matice  $A$ .

- Kedy vlastné vektory pre vlastnú hodnotu  $\lambda = 0$  generujú celý nulový priestor  $\mathcal{N}(A)$ ?
- Kedy generujú (všetky) vlastné vektory pre  $\lambda \neq 0$  stĺpcový priestor  $\mathcal{S}(A)$ ?

6. Mocniny  $A^k$  sa blížia k nule ak pre všetky  $|\lambda_i| < 1$  a “utečú do nekonečna”, ak pre nejaké  $|\lambda_i| > 1$ . Pre nasledujúce štyri príklady overte ich asymptotické správanie.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 6.9 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{1024}\| > 10^{700} \quad B^{1024} = I \quad C^{1024} = -C \quad \|D^{1024}\| < 10^{-78}$$

Nájdite vlastné hodnoty  $\lambda = e^{i\theta}$  pre matice  $B$  a  $C$ , ukážte pomocou toho, že  $B^4 = I$  a  $C^3 = -I$ .

7. (5.3.3) Nech je každý člen postupnosti  $\{G_k\}$  priemerom predchádzajúcich dvoch, t.j.  $G_{k+2} = \frac{1}{2}(G_{k+1} + G_k)$ . Nájdite príslušnú maticu (pomocou metódy popísanej v knižke) a zdiagonalizujte ju. Ak  $G_0 = 0$  a  $G_1 = \frac{1}{2}$  nájdite explicitný tvar pre člen  $G_k$ , tiež spočítajte limitu pre  $k \rightarrow \infty$ .

8. Nájdite explicitný tvar pre  $n$ -tý člen rekurentnej postupnosti  $\{x_n\}$  danej vzťahom  $x_{k+3} = 3x_{k+1} + 2x_k$  a začiatočnými podmienkami  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$  a  $x_2 = -2$ .

*Pozn.:* Tentoraz bude treba diagonalizovať  $3 \times 3$  maticu.

9. (5.R.9) Čo sa bude diať vo Fibonacciho postupnosti, ak pôjdeme “späť v čase” a ako  $F_{-k}$  súvisí s  $F_k$ ? Rekurentný vzorec  $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$  stále platí, preto  $F_{-1} = 1$ .

10. (5.R.11) Nech  $P$  je projekčná matica, ktorá zobrazuje  $\mathbb{R}^n$  kolmo na podpriestor  $S$ . Vysvetlite prečo je každý vektor z  $S$  vlastným vektorom, podobne prečo je každý vektor z  $S^\perp$  vlastným vektorom. Aké vlastné hodnoty im prislúchajú? (Všimnite si, že z rovnosti  $P^2 = P$  vyplýva  $\lambda^2 = \lambda$ .)

11. (5.R.16) Presvedčte sa, že maticová rovnica

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

nemá riešenie, teda matica  $A$  nemá odmocninu. Zmeňte diagonálne zložky matice  $A$  na 4 a nájdite odmocninu pre takúto maticu.

**12.** Predpokladajme, že matice  $A$  a  $B$  sa dajú diagonalizovať tou istou diagonalizačnou maticou  $S$ , teda máme  $A = S\Lambda_1 S^{-1}$  a  $B = S\Lambda_2 S^{-1}$ . Ukážte, že potom matice  $A$  a  $B$  komutujú a tiež, že vlastné hodnoty súčinu  $AB$  sú súčinom vlastných hodnôt matíc  $A$  a  $B$ . Ako je to s vlastnými vektormi?

**13.** Predpokladajme, že každá z matíc  $A$  a  $B$  má  $n$  rôznych vlastných hodnôt. Navyše predpokladajme, že matice  $A$  a  $B$  komutujú. Ukážte potom, že ak  $x$  je vlastný vektor matice  $A$ , potom je aj vlastným vektorom matice  $B$ . Výjdite z rovnosti  $ABx = BAx$ .

*Pozn.* Keďže toto platí pre každý vlastný vektor matice  $A$ , matice  $A$  a  $B$  majú rovnaké všetky vlastné vektory, a preto majú tú istú diagonalizačnú maticu  $S$ . Ukázali sme tak spolu s príkladom č. 12, že (diagonalizovateľné) matice komutujú práve vtedy, keď majú rovnaké vlastné vektory.