

1. (5.3.4) Biológ H. Bernadelli (1941) študoval tzv. populačné vlny a ako model opísal chrobáka, "ktorý žije tri roky a rozmnožuje sa v treťom roku života". Ak chrobák prežije prvý rok s pravdepodobnosťou  $\frac{1}{2}$ , druhý s pravdepodobnosťou  $\frac{1}{3}$  a v treťom roku splodí šesť samičiek, matica opisujúca medziročnú zmenu populácie bude

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že  $A^3 = I$  a sledujte populáciu chrobákov po dobu šesť rokov začínajúc v prvom roku s 3000 chrobákmi v každej vekovej skupine.

2. (5.3.5) Predpokladajme, že počas epidémie každý mesiac polovica zdravých ľudí ochorie a štvrtina chorých ľudí zomrie. Nájdite stabilný stav príslušného Markovovského procesu

$$\begin{bmatrix} m_{k+1} \\ ch_{k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_k \\ ch_k \\ z_k \end{bmatrix}.$$

3. (5.3.7) Nájdite limitné hodnoty  $y_k$  a  $z_k$  pre  $k \rightarrow \infty$  ak

$$y_{k+1} = 0.8y_k + 0.3z_k \quad y_0 = 0$$

$$z_{k+1} = 0.2y_k + 0.7z_k \quad z_0 = 5.$$

Tiež nájdite formuly pre  $y_k$  a  $z_k$  použijúc  $A^k = SA^kS^{-1}$ .

4. (5.3.9) Predpokladajme, že spoločnosť *Stahuj sa požičaným tirákom sám!* má tri hlavné centrá. Každý týždeň polovica z tých áut, čo sú v Malackách a Sabinove ide do Fiľakova a druhá polovica zostane tam, kde boli. Polovica tirákov z Fiľakova pôjde do Malaciek a druhá do Sabinova. Zostrojte  $3 \times 3$  maticu prechodu  $A$  a nájdite stály stav  $u_\infty$  zodpovedajúci vlastnej hodnote  $\lambda = 1$ .

5. (5.3.12) Ak  $A$  je Markovovská matica, ukážte, že súčet zložiek vektora  $Ax$  sa rovná súčtu zložiek vektora  $x$ . Odvodte z toho, že ak  $Ax = \lambda x$  pre  $\lambda \neq 1$ , potom súčet zložiek vlastného vektora  $x$  je 0 (a teda nemôže byť nezáporný).

6. Ak  $A$  je Markovovská matica, ukážte, že vektor  $(1, 1, \dots, 1)^T$  je vlastný vektor matice  $A^T$  pre  $\lambda = 1$ . Keďže vieme, že matice  $A$  a  $A^T$  majú rovnaké vlastné hodnoty, toto je alternatívny dôkaz toho, že jednotka je vždy vlastnou hodnotou Markovovskej matice.

7. (5.R.7) Čo by ste uprednostnili – 50%-ný úrok (p.a) pripisovaný raz ročne, 44%-ný úrok (p.a) pripisovaný štvrťročne alebo 42%-né (p.a) spojitý úročené?

8. Každá permutačná matica necháva vektor  $x = (1, 1, \dots, 1)^T$  nezmenený. Preto jedna z jej vlastných hodnôt je  $\lambda = 1$ . Nájdite zvyšné vlastné hodnoty pre permutačné matice:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zodpovedajú tieto permutácie nejakej rotácii okolo osi  $(1, 1, 1)^T$  (resp.  $(1, 1, 1, 1)^T$ )?

9. Pre maticu rotácie  $Q$  riešte charakteristickú rovnicu  $\det(Q - \lambda I) = 0$  pomocou vzorca na korene kvadratickej rovnice a presvedčte sa, že  $\lambda_{1,2} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ :

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Matica  $Q$  reprezentuje rotáciu  $\mathbb{R}^2$  o uhol  $\theta$ . Nájdite tiež vlastné vektory matice  $Q$  riešením (komplexnej) lineárnej rovnice  $(Q - \lambda I)x = 0$ .

10. Existuje reálna  $2 \times 2$  matica, rôzna od  $I$ , ktorá spĺňa  $A^3 = I$ ? Jej vlastné hodnoty musia spĺňať  $\lambda^3 = 1$ , čo spĺňajú okrem jednotky práve čísla  $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$  a  $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Akú stopu a determinant by teda mala matica  $A$  mať? Nájdite  $A$ .

11. (príklad zo života, na percentá) Pri výstavbe diaľnice D1 sa mali použiť tzv. PPP projekty, ktoré sa nakoniec zrušili, potom sa opäť uvažovalo o ich použití pri výstavbe iných úsekov, a opäť sa nerealizovali. V uplynulom roku sa znovu začalo uvažovať o ich použití pri výstavbe diaľnice D4 – obchvatu Bratislavy.

Na úsek Hričovské Podhradie – Dubná Skala (dĺžka 24,8 km + privádzač v dĺžke 4,25 km), ktorý v sebe zahŕňa aj obojsmerné tunely Ovčiarsko (cca. 2360 m), Žilina (cca. 690 m) a Višňové (cca. 7520 m) predstavovala v roku 2009 dohodnutá cena za stavebné práce 1,94 mld. Eur a následné splátky sa odhadovali na celkovú výšku 8,545 mld. Eur. Táto suma v sebe mala zahŕňať aj údržbu, prevádzku a rekonštrukciu počas najbližších 30 rokov.

V decembri roku 2013 bola uzavretá nová dohoda o výstavbe úseku Hričovské Podhradie – Lietavská Lúčka v dĺžke 11,3 km za 427,2 mil. Eur bez DPH. Zmluva pre úsek Lietavská Lúčka – Dubná skala (13,51 km) bola podpísaná v júni 2014 v hodnote 409,8 mil. Eur bez DPH, pričom ponuka firiem Skanska a Strabag vo výške 338,29 mil. Eur bez DPH bola zo súťaže z pomerne obskúrnych dôvodov vylúčená. So začiatkom výstavby privádzača Lietavská Lúčka – Žilina (7,28 km, predĺžené oproti pôvodnému plánu) sa počíta v roku 2016.

a) Odvodte vzorec pre výpočet celkovej výšky splátok hypotéky v trvaní 30 rokov pri fixnej úrokovej miere  $p$ . Pre jednoduchosť počítajte s jednou splátkou ročne, pred zaplatením ktorej sa zostávajúca dlžná suma prenásobí  $(1 + p)$ .

b) Odhadnite predraženie PPP projektov voči financovaniu priamo zo štátneho rozpočtu, resp. eurofondov. Vychádzajte z týchto parametrov z roku 2008:  $p_{sr} = 4,2\%$ ,  $p_{ppp} = 7,45\%$ .

c) Odhadnite predraženie výstavby diaľničných tunelov v pôvodnom návrhu PPP z porovnania s výstavbou úsekov v Rakúsku (napr. A14 Rheintal Autobahn, Pfändertunnel – 6,7 km za 212 mil. Eur, A9 Pyhrn Autobahn, Bosrucktunnel – 7,3 km za 282 mil. Eur a pod.), porovnajete s cenami z rokov 2013 a 2014 po zohľadnení inflácie.

d) Koľko bankových úradníkov by bolo možné počas najbližších 30 rokov zamestnať z rozdielu finančných nákladov medzi  $p_{sr}$  a  $p_{ppp}$ ? (uvažujte plat vo výške štvornásobku priemernej mzdy, nezabudnite na odvody, odhadnite nárast priemernej mzdy do budúcnosti).

e) Ako by vyšli podobné výpočty pre plánovanú PPP zábavku v prípade diaľničného obchvatu D4 okolo Bratislavy? <sup>1</sup>

<sup>1</sup> Zdroje:

<http://www.silnice-zeleznice.cz/clanek/dialnica-d1-hricovske-podhradie-dubna-skala-ako-iii-balik-ppp/>

<http://zilina.sme.sk/c/5226839/zacali-vystavbu-najnarocniejsieho-useku-dialnice-d1.html>

<http://www.asfinag.at/unterwegs/bauen>

<http://spravy.pravda.sk/ekonomika/clanok/302074-usek-d1-pri-ziline-postavi-zdruzenie-vedene-doprastavom/>

<http://www.ndsas.sk/stavba/>

<http://www.uvo.gov.sk/profily/-/profil/zdokument/9127/166071/1>

<http://www.etrend.sk/ekonomika/skanska-a-strabag-su-blizko-k-stavbe-tunela-visnove.html>

<http://www.pluska.sk/spravy/ekonomika/nekonencny-suboj-stavbu-tunela-visnove-firmy-skanska-strabag-vratili-do-sutaze.html>