

Pre niektoré z nasledujúcich úloh budete potrebovať tieto fakty:

Lineárna diferenciálna rovnica  $\frac{du(t)}{dt} = Au(t)$  pre diagonalizovateľnú maticu  $A$  má všeobecné riešenie tvaru

$$u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} y_n,$$

kde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sú vlastné vektory  $n \times n$  matice  $A$  a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  jej vlastné hodnoty. Koefficienty  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sa vypočítajú zo začiatočnej podmienky  $u_0 = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ .

To isté sa dá zapísať aj ako  $u(t) = e^{At} u_0$ , kde  $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$  a  $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ . Alternatívne  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \frac{(At)^4}{4!} + \dots$

Na prednáške 10. marca 2015 sme sa nestihli dostať k formulácii diferenciálnej rovnice pomocou matíc a neodvodili vyššie uvedené vzorce. Skúsime to spraviť na prednáške 17. marca 2015.

1. (5.4.1) Nájdite vlastné hodnoty, vlastné vektory a exponenciálu  $e^{At}$  pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exponenciálu môžete vypočítať pomocou vzorca  $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$  alebo sčítaním nekonečného radu  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$

2. (5.4.2) Pre maticu  $A$  z predchádzajúceho príkladu nájdite všeobecné riešenie diferenciálnej rovnice  $du/dt = Au$ . Nájdite riešenie, ktoré spĺňa počiatočnú podmienku  $u_0 = (3, 1)^T$ . Aký je *rovnovážny stav* keď  $t \rightarrow \infty$ ? (Pozn. toto je príklad spojitého markovovského procesu;  $\lambda = 0$  v diferenciálnej rovnici totiž zodpovedá  $\lambda = 1$  v diferenčnej rovnici vďaka rovnosti  $e^{0t} = 1$ ).

3. (5.4.4) Ak  $P$  je projekčná matica, ukážte pomocou sčítania nekonečného radu  $e^P = I + P + \frac{(P)^2}{2!} + \frac{(P)^3}{3!} + \dots$ , že

$$e^P \approx I + 1.718P.$$

4. (5.4.5) Diagonálna matica, napr.  $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ , spĺňa rovnosť  $e^{\Lambda(t+T)} = e^{\Lambda t} e^{\Lambda T}$ , nakoľko rovnosť platí pre každú zložku na diagonále.

- a) zdôvodnite prečo platí  $e^{A(t+T)} = e^{At} e^{AT}$ , použijúc vzťah  $e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1}$ ,  
 b) presvedčte sa, že pre matice neplatí vzťah  $e^{A+B} = e^A e^B$  na príklade

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{spočítajte } e^A \text{ a } e^B \text{ pomocou nekonečných radov})$$

5. (5.4.13) Pre antisymetrickú rovnicu

$$\frac{du}{dt} = Au = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

- a) nájdite predpis pre  $u'_1, u'_2$  a  $u'_3$  a ukážte, že  $u'_1 u_1 + u'_2 u_2 + u'_3 u_3 = 0$ ,  
 b) odvoďte z toho, že druhá mocnina dĺžky vektora  $\|u\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$  je konštantná v čase,  
 c) nájdite vlastné hodnoty matice  $A$ .

Vektor riešení bude rotovať okolo osi  $w = (a, b, c)^T$ , nakoľko  $u' = Au$  je *vektorový súčin*  $u \times w$ , ktorý je kolmý na  $u$  aj  $w$ .

6. Vychádzajúc zo vzorca  $e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots$  zderivovaním po členoch a následným sčítaním ukážte, že naozaj  $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$ .

7. Pre maticu

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nájdite všeobecný tvar jej mocnín  $J^k$ . Dosadiac do nekonečného radu vypočítajte  $e^{Jt}$ .

Skúste vypočítať mocniny  $J_n^k$  a exponenciálu  $e^{J_n t}$  aj pre  $n \times n$  maticu

$$J_n = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

8. (5.4.8) Predpokladajme, že veľkosti populácií zajacov  $z(t)$  a vlkov  $v(t)$  spĺňajú sústavu diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= 4z - 2v, \\ \frac{dv}{dt} &= z + v. \end{aligned}$$

- Je takýto systém stabilný, neutrálne stabilný alebo nestabilný? (pozri str. 280 v knižke)
- Ak na začiatku máme  $z_0 = 300$  a  $v_0 = 200$ , ako bude vyzerat stav populácií v čase  $t$ ?
- Aký bude pomer populácií zajacov a vlkov po dlhom, dlhom čase?

9. (5.3.18) Vysvetlite (matematicky alebo ekonomicky), prečo zväčšenie ľubovoľnej zložky produkčnej matice  $A$  vedie k zväčšeniu  $t_{max} = \lambda_1$ , a teda k spomaleniu tempa rastu. (pozri dôkaz tvrdenia 5K na str. 271)

10.\* (5.4.17) Ak do rovnice kmitania pridáme aj lineárny člen  $fx'$  zodpovedajúci tlmeniu spôsobenému trecím odporom (napr. kmitanie vo viskóznej kvapaline), dostaneme rovnicu tlmeného oscilátora

$$x'' + fx' + \omega^2 x = 0.$$

Prepíšte takúto rovnicu do maticového tvaru  $u' = Au$  a nájdite riešenie v tvare  $u(t) = e^{At}u_0$ .

Vysvetlite kvalitatívny rozdiel riešení pre  $f < 2\omega$  a  $f > 2\omega$ .