Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 6

Cvičenia v týždni 30. marca 2015 a pred písomkou

---

1. (5.5.10) a) Koľko stupňov voľnosti majú reálne symetrické matice, reálne diagonálne matice a reálne ortogonálne matice?

Pozn. stupeň voľnosti udáva dimenziu príslušného priestoru matíc, t.j. počet voľných parametrov, ktoré môžeme nezávisle na sebe meniť a stále zotrvať v danom priestore. Odpoveď v prvom prípade je súčtom zvyšných dvoch, vďaka rozkladu $A = Q\Lambda Q^T$.

b) Ukážte, že 3×3 hermitovské matice majú 9 (reálnych) stupňov voľnosti a unitárne matice majú 6. (Stĺpce a riadky matice U môžeme násobiť ľubovoľným $e^{i\theta}$.)

2. (5.5.11) Overte, že rovnosť $A = Q\Lambda Q^T$ sa pre reálnu symetrickú 2×2 maticu A dá prepísať ako $A = \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T$, kde λ_1, λ_2 sú vlastné hodnoty a x_1, x_2 sú ortonormálne vlastné vektory. Nájdite takýto rozklad pre matice:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. (5.5.12) *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite v pravdivom prípade a nájdite protipríklad v nepravdivom:
a) Ak A je hermitovská matica, potom $A + iI$ je invertibilná.
b) Ak Q je ortogonálna matica, potom $Q + \frac{1}{2}I$ je invertibilná.
c) Ak A má reálne zložky, potom $A + iI$ je invertibilná.

4. (5.5.14) Pre nasledujúce matice rozhodnite či patria do nižšie uvedených maticových množín.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množiny ortogonálnych, invertibilných, projekčných, permutačných, hermitovských, diagonalizovateľných, symetrických a markovovských matíc a množina matíc hodnosti 1.

5. (5.5.16) Uveďte jeden významný fakt o vlastných hodnotách
a) reálnej symetrickej matice,
b) stabilnej matice; t.j. všetky riešenia systému $du/dt = Au$ konvergujú do nuly,
c) markovovskej matice,
d) nediagonalizovateľnej matice,
e) singulárnej matice.
f) ortogonálnej matice,

6. (5.5.17) Ukážte, že ak sú matice U a V unitárne, potom je unitárnou maticou aj ich súčin UV. Využite definičnú podmienku $U^H U = I$.

7. (5.5.18) Ukážte, že determinant unitárnej matice spĺňa $|\det U| = 1$, ale determinant sa nemusí nutne rovnať jednotke. Tiež ukážte, že matice U a U^H môžu mať rôzne determinanty. Opíšte všetky 2×2 unitárne matice.

8. (5.5.19) Nájdite tretí stĺpec matice

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \end{bmatrix},$$

tak aby bola unitárna. Akú veľkú voľnosť pri takomto výbere máme?

9. Nájdite chybu v nasledujúcom "dôkaze" toho, že každá vlastná hodnota matice s reálnymi zložkami je reálne číslo:

Rovnosť $Ax = \lambda x$ môžme zľava prenásobiť x^T, čím dostaneme $x^T Ax = \lambda x^T x$. Z toho $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$, čo je pre $x \in \mathbb{R}^n$ vždy reálne číslo.

(Porzite tiež str. 295 v knižke)

10. (5.5.21) Nájdite všetky 3×3 matice, ktoré sú súčasne hermitovské, unitárne aj diagonálne. Koľko ich bude?

11. Ak vynásobíme hermitovskú maticu A reálnym číslom c, bude potom aj matica cA hermitovská? Ak zvolíme $c = i$, ukážte, že potom bude iA anti-hermitovská. Vysvetlite ako tento fakt súvisí s vetou o vlastných hodnotách hermitovských a anti-hermitovských matíc.

12. Ak $A + iB$ je unitárna matica (A aj B sú reálne matice), ukážte, že $Q = \left[\begin{smallmatrix} A & -B \\ B & A \end{smallmatrix}\right]$ je ortogonálna matica.

13.* Predpokladajme, že $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$ je koreň rovnice $z^n = 1$. Majme maticu F, pre ktorú $F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(j-1)}$, teda

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ & & & \ddots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že F je unitárna matica; tiež, že $F^4 = I$ a odvoďte z toho, že vlastné hodnoty F sú $1, -1, i$ a $-i$. Pomocou matematického softvéru (Matlab, Mathematica, Octave a pod.) nájdite násobnosti týchto vlastných hodnôt a vlastné vektory.

Matica F sa nazýva *Fourierova matica*, násobenie ňou zodpovedá tzv. *diskrétnej Fourierovej transformácii*. Pozrite tiež príklad č. 5 z DÚ 5 a `http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform`.