Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 9

Na týždeň 27. apríla 2015

---

1. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a vektorový podpriestor $V \subset \mathbb{R}^4$ generovaný vektormi $v_1 = (0,1,0,1)^T$ a $v_2 = (3,1,3,1)^T$. Ukážte, že lineárne zobrazenie T dané maticou A zobrazuje vektorový podpriestor V sám na seba. Nájdite 2×2 maticu A', ktorá opisuje lineárne zobrazenie $T : V \to V$ v báze (v_1, v_2), nájdite jej vlastné hodnoty a príslušné vlastné vektory vo V.

Nájdite dvojrozmerný vektorový podpriestor $W \subset \mathbb{R}^4$, tak aby W bol tiež invariantný vzhľadom na T, $V \cap W = \{0\}$ a $V \oplus W = \mathbb{R}^4$.

2. Matica A sa nazýva *unipotentná* ak je matica $A - I$ nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice A. Čo budú jej vlastné hodnoty?

3. Majme matice A a B. Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že AB a BA majú rovnaké vlastné hodnoty.

Pozn.: porovnajte s príkladom č. 10 v domácej úlohe č. 7. Vedeli by ste nájsť také A a B aby matice AB a BA neboli podobné?

4. Nech J a J' sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde σ je nejaká permutácia. Ukážte, že matice J a J' sú podobné.

Pozn. Maticu J' dostaneme z J poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov e_i.

5. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.

a) Regulárna matica nemôže byť podobná singulárnej matici.
b) Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.
c) Matica A nemôže byť podobná matici $-A$ okrem prípadu ak $A = 0$.
d) $A - I$ nemôže byť podobná matici $A + I$.
e) $A + I$ nemôže byť podobná matici $I - A$.
f) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$.
g) matica $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ je podobná matici $\left[\begin{smallmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$.

6. Nech matice A a B sú podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$. Ukážte, že potom platí $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(B - \lambda I)^k$ pre ľubovoľné $\lambda \in \mathbb{C}$ a $k \in \mathbb{N}$.

To, okrem iného znamená, že A a B majú rovnaké vlastné hodnoty – to sú práve λ s nenulovými dimenziami $\mathcal{N}(A - \lambda I)$, ale aj rovnaké geometrické násobnosti vlastných hodnôt.

7. Ukážte, že ak sú matice A a B podobné, t.j. $B = M^{-1}AM$, potom sú ich minimálne polynómy $m_A(x)$ a $m_B(x)$ rovnaké.

Definícia minimálneho polynómu matice: $m_A(x) = x^k + m_{k-1}x^{k-1} + \cdots + m_1 x + m_0$ je taký nenulový polynóm, ktorý 'nuluje' maticu A, t.j. $m_A(A) = A^k + m_{k-1}A^{k-1} + \cdots + m_1 A + m_0 I = 0$ a súčasne je jeho stupeň k najnižší možný.

8. Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica J *nie je podobná* matici K:

$$J = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{a} \quad K = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Pre ľubovľnú maticu M provnajte JM a MK. Ak sa rovnajú, ukážte, že M nie je invertibilná, a teda rovnosť $M^{-1}JM = K$ nemôže nastať. Aké sú minimálne polynómy matíc J a K?

9. Nech $n \times n$ matica A reprezentuje lineárne zobrazenie $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné podpriestory V_λ, zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice A, sú invariantné vzhľadom na lineárnu transformáciu T, t.j. $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.

Definícia zovšeobecneného vlastného podpriestoru: $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0 \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}\}$, resp. $V_\lambda = \bigcup_k \mathcal{N}(A - \lambda I)^k$.

10. Majme maticu A. Ukážte, že zovšeobecnené vlastné vektorové priestory V_{λ_1} a V_{λ_2} prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám λ_1 a λ_2 majú triviálny prienik.

11. Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu B nájdite aj jej Jordanov tvar.

12. Ukážte, že A^T je vždy podobná matici A. Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

a) Pre A skladajúcu sa z jedného bloku J_i nájdite maticu M_i takú aby $M_i^{-1} J_i M_i = J_i^T$.

b) Pre A v Jordanovom tvare poskladajte maticu M_0 z menších blokov tak, aby $M_0^{-1} J M_0 = J^T$.

c) Pre všeobecnú maticu $A = MJM^{-1}$ ukážte, že A^T je podobná J^T a tým pádom aj J a A.

13. Nech A je komplexná $n \times n$ matica spĺňajúca $A^k = I$ pre nejaké k. Aké môžu byť vlastné hodnoty matice A? Ukážte, že A je diagonalizovateľná (Aký môže byť Jordanov tvar matice A? Ako vyzerá trojuholníková T zo Schurovej lemmy?).