Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 11

Cvičenia v týždni 11. mája 2015
Väčšina potrebnej teórie o kvadratických formách bude až na prednáške 12.5.2015.
Pred cvičením si môžete zbežne pozrieť úvod kapitoly 6 v Strangovi

---

Definícia: Hovoríme, že reálna symetrická matica A je kladne definitná, ak tzv. *kvadratická forma* $f(x) = x^T Ax$ spĺňa $f(x) \geq 0$ pre všetky $x \in \mathbb{R}^n$ a rovnosť nastáva len pre $x = 0$.

1. (6.1.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, a pre každú z nich roznásobte kvadratickú formu $f = x^T Ax$:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -8 \end{bmatrix}$.

Determinant v časti b) je nulový; pozdĺž ktorej priamky bude forma f nulová?

2. (6.1.3) Ak 2×2 matica $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ spĺňa podmienku $a > 0$ a $ac > b^2$, nájdite vlastné hodnoty ako korene charakteristickej rovnice $\det(A - \lambda I) = 0$ a ukážte, že sú obe kladné.

Pripomenutie faktu: ak pre symetrickú maticu ($A^T = A$) spravíme LDU rozklad bez výmeny riadkov, v skutočnosti dostaneme rozklad $A = LDL^T$. Použite v nasledujúcich príkladoch.

3. (6.1.5) a) Pre aké hodnoty parametra b je matica $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & b \\ b & 9 \end{smallmatrix}\right]$ kladne definitná?
b) Nájdite faktorizáciu $A = LDL^T$ pre b z intervalu kladnej definitnosti.
c) Nájdite minimálnu hodnotu výrazu $\frac{1}{2}(x^2 + 2bx + 9y^2) - y$ pre b z tohto intervalu.
d) Aké je minimum pre $b = 3$?

4. (6.1.7) a) Nájdite 3×3 matice A_1, A_2 zodpovedajúce kvardatickým formám

$$f_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

$$f_2 = x_1^2 + 2x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

b) Ukážte, že forma f_1 sa dá napísať ako *jeden* štvorec, a teda nie je kladne definitná. Pre aké hodnoty je f_1 rovná nule?
c) Nájdite rozklad A_2 ako LL^T (L je dolná trojuholníková matica). Vyjadrite f_2 ako súčet troch štvorcov.

5. (6.1.9) Kvadratická forma $f = 3(x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2$ je kladne definitná. Nájdite jej maticu A, rozložte ju ako LDL^T a vysvetlite súvislosť zložiek matíc D a L s pôvodným tvarom formy f.

6. (6.2.1) Pre aké hodnoty parametra a je matica A kladne definitná?

$$B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

7. (6.2.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2.$$

8. (6.2.4) S prihliadnutím na vlastné hodnoty ukážte, že ak je matica A kladne definitná, potom sú aj matice A^2 a A^{-1} kladne definitné.

9. (6.2.5) Ukážte, že ak sú matice A a B kladne definitné, potom je takou aj matica $A + B$. Ktoré z kritérií kladnej definitnosti I – IV sa hodí v tomto prípade?

10. (6.2.6) Použitím pivotov, vlastných hodnôt a vlastných vektorov matice $A = \left[\begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right]$ zapíšte A v tvare $R^T R$ všetkými troma spôsobmi z prednášky – $(LD^{\frac{1}{2}})(D^{\frac{1}{2}}L^T)$, $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}})(\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$, a $(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)(Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T)$.

11. (6.2.8) Ak je matica A symetrická a kladne definitná a C je regulárna, ukážte, že matica $B = C^T AC$ je tiež symetrická a kladne definitná.

12. (6.2.10) Elipsa $u^2 + 4v^2 = 1$ zodpovedá matici $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right]$. Nájdite vlastné hodnoty a vlastné vektory matice A a načrtnite elipsu. Spravte to isté pre elipsu $5u^2 + 8uv + 5v^2 = 1$ (pozri príklad č. 10).

13. (6.2.12) V trojrozmernom priestore rovnica $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ reprezenutje elipsoid pokiaľ sú všetky λ_i kladné. Opíšte všetky možné plochy, ktoré dostaneme v semi-definitnom prípade, t.j. ak jedna alebo viac vlastných hodnôt bude nulových.

14. (6.2.13) Nájdite analogických päť podmienok aby 3×3 matica A bola *záporne definitná* (matica $-A$ je potom kladne definitná). Špeciálnu pozornosť venujte podmienke III) a súvisu $\det A$ a $\det(-A)$.

15. (6.2.16) *Pravda/Nepravda* Ak je matica A symetrická kladne definitná a Q je ortogonálna, potom:
a) $Q^T AQ$ je diagonálna matica,
b) $Q^T AQ$ je symetrická kladne definitná matica,
c) $Q^T AQ$ má rovnaké vlastné hodnoty ako A,
d) e^{-A} je symetrická kladne definitná matica.

16. (6.3.1) Pre semidefinitné matice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 2)} \qquad \text{a} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{(hodnosť 1)}$$

vyjadrite $x^T Ax$ ako súčet dvoch štvorcov a $x^T Bx$ ako jeden štvorec.

17. (6.3.2) Rozhodnite či sú nasledujúce matice kladne definitné, kladne semidefinitné alebo indefinitné

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{a} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$