

1. Majme maticu

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 & -1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 7 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a vektorový podpriestor  $V \subset \mathbb{R}^4$  generovaný vektormi  $v_1 = (0, 1, 0, 1)^T$  a  $v_2 = (3, 1, 3, 1)^T$ . Ukážte, že lineárne zobrazenie  $T$  dané maticou  $A$  zobrazuje vektorový podpriestor  $V$  sám na seba. Nájdite  $2 \times 2$  maticu  $A'$ , ktorá opisuje lineárne zobrazenie  $T : V \rightarrow V$  v báze  $(v_1, v_2)$ , nájdite jej vlastné hodnoty a príslušné vlastné vektory vo  $V$ .

Nájdite dvojrozmerný vektorový podpriestor  $W \subset \mathbb{R}^4$ , tak aby  $W$  bol tiež invariantný vzhľadom na  $T$ ,  $V \cap W = \{0\}$  a  $V \oplus W = \mathbb{R}^4$ .

2. Matica  $A$  sa nazýva *unipotentná* ak je matica  $A - I$  nilpotentná. Nájdite charakteristický polynóm unipotentnej matice  $A$ . Čo budú jej vlastné hodnoty?

3. Majme matice  $A$  a  $B$ . Vychádzajúc z rovnosti

$$\begin{bmatrix} I & -A \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{bmatrix}$$

ukážte, že  $AB$  a  $BA$  majú rovnaké vlastné hodnoty.

*Pozn.:* porovnajte s príkladom č. 10 v domácej úlohe č. 7. Vedeli by ste nájsť také  $A$  a  $B$  aby matice  $AB$  a  $BA$  neboli podobné?

4. Nech  $J$  a  $J'$  sú blokové matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_k \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad J' = \begin{bmatrix} J_{\sigma_1} & & & \\ & J_{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{\sigma_k} \end{bmatrix},$$

kde  $\sigma$  je nejaká permutácia. Ukážte, že matice  $J$  a  $J'$  sú podobné.

*Pozn.* Maticu  $J'$  dostaneme z  $J$  poprehadzovaním blokov, čo zodpovedá zmene poradia bázových vektorov  $e_i$ .

5. *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite.

- Regulárna matica nemôže byť podobná singularnej matici.
- Symetrická matica nemôže byť podobná matici, ktorá nie je symetrická.
- Matica  $A$  nemôže byť podobná matici  $-A$  okrem prípadu ak  $A = 0$ .
- $A - I$  nemôže byť podobná matici  $A + I$ .
- $A + I$  nemôže byť podobná matici  $I - A$ .
- matica  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$  je podobná matici  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ .
- matica  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$  je podobná matici  $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

6. Nech matice  $A$  a  $B$  sú podobné, t.j.  $B = M^{-1}AM$ . Ukážte, že potom platí  $\dim \mathcal{N}(A - \lambda I)^k = \dim \mathcal{N}(B - \lambda I)^k$  pre ľubovoľné  $\lambda \in \mathbb{C}$  a  $k \in \mathbb{N}$ .

To, okrem iného znamená, že  $A$  a  $B$  majú rovnaké vlastné hodnoty – to sú práve  $\lambda$  s nenulovými dimenziami  $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ , ale aj rovnaké geometrické násobnosti vlastných hodnôt.

7. Ukážte, že ak sú matice  $A$  a  $B$  podobné, t.j.  $B = M^{-1}AM$ , potom sú ich minimálne polynómy  $m_A(x)$  a  $m_B(x)$  rovnaké.

Definícia minimálneho polynómu matice:  $m_A(x) = x^k + m_{k-1}x^{k-1} + \dots + m_1x + m_0$  je taký nenulový polynóm, ktorý 'nuluje' maticu  $A$ , t.j.  $m_A(A) = A^k + m_{k-1}A^{k-1} + \dots + m_1A + m_0I = 0$  a súčasne je

jeho stupeň  $k$  najnižší možný.

**8.** Nasledujúce Jordanove matice majú nulu ako štvornásobnú vlastnú hodnotu, majú dva lineárne nezávislé vektory, ale veľkosti ich blokov sa nezhodujú. Preto matica  $J$  nie je podobná matici  $K$ :

$$J = \left[ \begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \text{a} \quad K = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Pre ľubovľnú maticu  $M$  provnajte  $JM$  a  $MK$ . Ak sa rovnajú, ukážte, že  $M$  nie je invertibilná, a teda rovnosť  $M^{-1}JM = K$  nemôže nastať. Aké sú minimálne polynómy matíc  $J$  a  $K$ ?

**9.** Nech  $n \times n$  matica  $A$  reprezentuje lineárne zobrazenie  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ukážte, že zovšeobecnené vlastné podpriestory  $V_\lambda$ , zložené z príslušných zovšeobecnených vlastných vektorov matice  $A$ , sú invari- antné vzhľadom na lineárnu transformáciu  $T$ , t.j.  $T(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$ .

Definícia zovšeobecneného vlastného podpriestoru:  $V_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I)^k x = 0 \text{ pre nejaké } k \in \mathbb{N}\}$ , resp.  $V_\lambda = \bigcup_k \mathcal{N}(A - \lambda I)^k$ .

**10.** Majme maticu  $A$ . Ukážte, že zovšeobecnené vlastné vektorové priestory  $V_{\lambda_1}$  a  $V_{\lambda_2}$  prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$  majú triviálny prienik.

**11.** Pre matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

nájdite ich charakteristické polynómy. Pre maticu  $B$  nájdite aj jej Jordanov tvar.

**12.** Ukážte, že  $A^T$  je vždy podobná matici  $A$ . Vieme, že vlastné hodnoty majú rovnaké, problém by mohol byť v štruktúre vlastných vektorov.

- Pre  $A$  skladajúcu sa z jedného bloku  $J_i$  nájdite maticu  $M_i$  takú aby  $M_i^{-1}J_iM_i = J_i^T$ .
- Pre  $A$  v Jordanovom tvare poskladajte maticu  $M_0$  z menších blokov tak, aby  $M_0^{-1}JM_0 = J^T$ .
- Pre všeobecnú maticu  $A = MJM^{-1}$  ukážte, že  $A^T$  je podobná  $J^T$  a tým pádom aj  $J$  a  $A$ .

**13.** Nech  $A$  je komplexná  $n \times n$  matica spĺňajúca  $A^k = I$  pre nejaké  $k$ . Aké môžu byť vlastné hodnoty matice  $A$ ? Ukážte, že  $A$  je diagonalizovateľná (Aký môže byť Jordanov tvar matice  $A$ ? Ako vyzerá trojuholníková  $T$  zo Schurovej lemmy?).