

## Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 10

Cvičenia v týždni 29. apríla 2019  
Písomka 7.5.2019 bude obsahovať témy z tejto úlohy

---

1. Predpokladajme, že nenulové vektory  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1} \in \mathbb{R}^n$  spĺňajú rovnosti  $Ax_i = \lambda x_i + x_{i-1}$  pre  $i = 1, \dots, k-1$  a  $Ax_0 = \lambda x_0$ , teda ide o reťazec zovšeobecnených vlastných vektorov pre vlastnú hodnotu  $\lambda$ . Ukážte, že  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  sú lineárne nezávislé. Ukážte tiež, že  $k \leq n$ .

2. (5.6.31) Vypíšte všetky možnosti pre Jordanov tvar  $5 \times 5$  matice, ktorá má nulu ako päťnásobnú vlastnú hodnotu. (Zvykom býva začať väčšími blokmi v ľavom hornom rohu a postupne prejsť k najmenším idúc dole po diagonále matice  $J$ .)

Ukážte, že v prípade, ak má matica dva lineárne nezávislé vlastné vektory máme dve možnosti pre Jordanov tvar  $J$ .

3. (B.5) Skúste nájsť Jordanov tvar pre nasledujúce matice “nahliadnutím” - t.j. snažte sa použiť čo najmenej výpočtov:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Ako súvisia veľkosti blokov Jordanovho kanonického tvaru  $J$  pre maticu  $A$  s exponentami  $d_i$  vo faktorizácii minimálneho polynómu  $m_A(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} (x - \lambda_2)^{d_2} \dots (x - \lambda_m)^{d_m}$ ? Čo to hovorí o diagonalizovateľnosti matice  $A$ ?

5. (B.1) Pre nasledujúce matice nájdite Jordanov tvar a pokúste sa nájsť aj maticu  $M$  z rovnosti  $A = MJM^{-1}$ . (v prípade nejasností pozrite Appendix B v knižke)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. (B.3) Pre maticu  $B$  z predchádzajúceho príkladu nájdite  $e^{Bt}$  ako  $Me^{Jt}M^{-1}$  a porovnajte výsledok so súčtom nekonečného radu  $I + Bt + \frac{(Bt)^2}{2!} + \dots$ .

7. (B.6) Pre maticu  $B$  (vlastné hodnoty 1, 1, 1 a -1) nájdite jej Jordanov tvar a aj maticu  $M$  z rovnosti  $B = MJM^{-1}$ .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. (B.7) Predpokladajme, že matica  $A$  spĺňa rovnicu  $A^2 = A$ . Ukážte, že jej Jordanov tvar  $J = M^{-1}AM$  tiež spĺňa  $J^2 = J$ . Keďže bloky na diagonále sa pri násobení navzájom nekombinujú, toto znamená, že  $J_i^2 = J_i$  pre každý z blokov. Priamym výpočtom ukážte, že potom každý blok  $J_i$  musí byť veľkosti  $1 \times 1$  a  $J_i = [0]$  alebo  $J_i = [1]$ . Inými slovami,  $A$  je podobná diagonálnej matici s nulami a jednotkami na diagonále.

Ako sa dá geometricky interpretovať zobrazenie dané maticou  $A$ ? Ako sa dá nahliadnuť že vlastné vektory budú tvoriť bázu a vlastné hodnoty budú práve nuly a jednotky?