

1. Nájdite príklad podpriestorov V a W v \mathbb{R}^3 tak, aby $V \cap W$ obsahovalo iba nulový vektor ale V nebol ortogonálny na W .
2. (3.R.19) Ukážte, že ak vektory v_1, \dots, v_n tvoria ortonormálnu bázu \mathbb{R}^n , potom $v_1 v_1^T + \dots + v_n v_n^T = I$.
3. (3.R.20) *Pravda/Nepravda:* Ak vektory x a y sú ortogonálne a P je projekcia, potom Px a Py sú ortogonálne. Zdôvodnite.
4. (3.R.31) Ukážte, že vzdialenosť nadroviny $a^T x - c = 0$ od počiatku v \mathbb{R}^m je $|c|/\|a\|$. Ako ďaleko je nadrovina $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 8$ od počiatku a ktorý jej bod je k nemu najbližšie?
5. Majme vektory $a_1 = (1, 1, 1)$ a $a_2 = (1, -1, 1)$. Maticu projekcie na vektor a_1 označme P_1 a maticu projekcie na vektor a_2 označme P_2 . T.j. $P_i = \frac{a_i a_i^T}{a_i^T a_i}$. Nájdite maticu projekcie P na rovinu generovanú vektormi a_1, a_2 a presvedčte sa, že $P \neq P_1 + P_2$. Akú podmienku by museli spĺňať vektory a_1, a_2 aby takáto rovnosť platila?
6. (3.4.18) Ak $A = QR$ nájdite jednoduchý vzorec pre projekčnú maticu P zobrazujúcu do stĺpcového priestoru A .
7. (3.4.24) Nájdite nasledujúce Legendrove polynómy – t.j. polynómy stupňa 3 a 4 ortogonálne na 1, x a $x^2 - \frac{1}{3}$ na intervale $\langle -1, 1 \rangle$.
8. (3.R.39) Ako vyzerá matica $A^T A$ ak sú stĺpce matice A ortogonálne? Ako keď sú ortonormálne?
9. (3.6.1) Nech S a T sú podpriestory \mathbb{R}^{13} s dimenziami $\dim S = 7$ a $\dim T = 8$.
 - a) Aká je najväčšia možná dimenzia $S \cap T$?
 - b) Aká je najmenšia možná dimenzia $S \cap T$?
 - c) Aká je najmenšia možná dimenzia $S + T$?
 - d) Aká je najväčšia možná dimenzia $S + T$?
10. (3.6.6) Ak $V \cap W = \{0\}$, potom sa súčet $V + W$ nazýva *priamy súčet* priestorov V a W . Značíme $V \oplus W$. Ak je V generovaný vektormi $(1, 1, 1)$ a $(1, 0, 1)$, nájdite W aby $V \oplus W = \mathbb{R}^3$.
11. (3.6.7) Zdôvodnite, prečo sa každý vektor x v priamom súčte $V \oplus W$ dá *jednoznačne* vyjadriť ako $x = v + w$ pre $v \in V$ a $w \in W$.
12. (3.6.8) Priestor V je generovaný vektormi $v_1 = (1, 1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ a priestor W vektormi $w_1 = (0, 1, 0, 1)$ a $w_2 = (0, 0, 1, 1)$. Nájdite bázu súčtu $V + W$, ako aj bázu a dimenziu prieniku $V \cap W$.