

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej algebr a geometrie I., 10. november 2021

1. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

- nájdite dimenziu a bázy jej nulového priestoru  $\mathcal{N}(A)$  a stĺpcového priestoru  $\mathcal{S}(A)$ ,
- nájdite rovnicu/e, ktorú/é musia spĺňať zložky vektora  $b \in \mathcal{S}(A)$ ,
- pre (každé)  $b \in \mathcal{S}(A)$  nájdite všeobecné riešenie systému  $Ax = b$  (ak existuje).

2. Pre maticu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

nájdite  $A^n$  a  $A^{-n}$  pre  $n \in \mathbb{N}$ . Dokážte správnosť svojho riešenia (napr. matematickou indukciou).

3. Uvažujme množinu  $4 \times 4$  cirkulantných matíc

$$\mathcal{C}_4 = \left\{ \left[ \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{array} \right] \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

- Ukážte, že  $\mathcal{C}_4$  tvorí vektorový podpriestor v  $M_{4,4}(\mathbb{R})$ . Nájdite jeho dimenziu a bázu.
- Ukážte, že množina  $\mathcal{C}_4$  je uzavretá vzhľadom na súčin, t.j. pre  $A, B \in \mathcal{C}_4$  platí  $AB \in \mathcal{C}_4$ .
- Ukážte, že ak pre  $A \in \mathcal{C}_4$  platí  $a + b + c + d = 0$  alebo  $a - b + c - d = 0$ , tak je singulárna.

4. Nech  $a = (a_1, a_2, a_3)^T \in \mathbb{R}^3$  je pevne daný vektor a  $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  je zobrazenie dané predpisom

$$\alpha : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}.$$

- Ukážte, že  $\alpha$  je lineárne zobrazenie.
- Nájdite maticu zobrazenia  $T_\alpha$  vzhľadom na štandardnú bázu  $\mathbb{R}^3$ .
- Pre  $a = (1, 2, 1)^T$  nájdite jadro a obraz zobrazenia  $\alpha$ , ich dimenzie a bázy.
- Čo sa dá na základe častí a), b), c) povedať o regularite ľubovoľnej antisymetrickej  $3 \times 3$  matice?

5. (Pravda/Npravda) So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom.

a) Ak  $A$  je nenulová matica a  $B \neq -C$ , tak matica  $D = [A^T(B + C)]^T$  je nenulová.

b) Ak sú vektory  $u, v, w, x, z$  lin. nezávislé, tak sú aj vektory  $u + v, w + z + v, z + x$  lin. nezávislé.

c) Nech  $a \in \mathbb{R}$  je parameter. Zobrazenie  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dané predpisom  $\alpha : (x_1, x_2)^T \mapsto (a^2x_1, -x_2)^T$  je lineárne práve vtedy, keď  $a = 0$ .