

Podvázanie pri písomke je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať mobilné telefóny a iné elektronické zariadenia. Veľa zdaru!

Písomka z Lineárnej Algebry I., 15. december 2021

1. Nech A a B sú matice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nájdite bázy a dimenzie podpriestorov $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{N}(B)$, $\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B)$ a $\mathcal{S}(A^T) \cap \mathcal{S}(B^T)$ v \mathbb{R}^4 .

2. Nech S , T a U sú nejaké podpriestory priestoru V . Ukážte, že platia inklúzie

- $S \cap U \subseteq (S + T) \cap U$ a $T \cap U \subseteq (S + T) \cap U$
- $(S \cap U) + (T \cap U) \subseteq (S + T) \cap U$.
- Nájdite príklad, kedy v časti b) nenastáva rovnosť.

3. Pre maticu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

nájdite pomocou Gram-Schmidtovho ortogonalizačného procesu jej QR rozklad.

4. Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a $W \subseteq V$ je podpriestor vo V . Nech $u \in V$ je pevne daný vektor a $x \in W$ je vektor, pre ktorý platí

$$\|u - x\| \leq \|u - w\|, \quad \forall w \in W.$$

- Zvoľte $w = c \cdot x$, kde c je ľubovoľné reálne číslo, a ukážte, že platí $\langle u, x \rangle = \langle x, x \rangle$.
- Pomocou a) ukážte, že $u - x \in W^\perp$.
- Dokážte aj opačnú implikáciu, t. j. ak $u - x \in W^\perp$, potom $\|u - x\| \leq \|u - w\|, \forall w \in W$.
Pomôcka: $u - w = (u - x) + (x - w)$.
- Interpretujte výsledky v b) a c) z geometrického hľadiska.

5. Nájdite determinant matice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}.$$