Podvádzanie pri skúške je vážnym porušením Študijného poriadku FMFI UK, ktoré môže viesť k vylúčeniu zo štúdia. Nerobte hlúposti. Počas písomky je zakázané používať komunikačné nástroje a informačné zdroje. Veľa zdaru!

Písomná skúška z Lineárnej algebry a geometrie I., 18. január 2022

1. *(5 bodov)* Uvažujme množinu

$$W = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \,|\, x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0, n \in \mathbb{N}\}\,.$$

a) Ukážte, že W tvorí vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^\infty$.
b) Ukážte, že $x \in W$ práve vtedy, keď $\forall n \in \mathbb{N} : x_n = (2 - 2^{n-1})x_1 + (2^{n-1} - 1)x_2$, pričom $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
c) Pomocou časti b) určite dimenziu a bázu W.

2. *(5 bodov)* Uvažujme zobrazenie $L : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ dané predpisom

$$L(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Ukážte, že zobrazenie L je lineárne.
b) Nájdite jadro a obraz zobrazenia L, ich dimenzie a bázy.
c) Nájdite maticu zobrazenia T_L vzhľadom na štandardnú bázu $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
d) Nájdite všetky reálne čísla λ a nenulové 2×2 matice X, pre ktoré má rovnica $L(X) = \lambda X$ riešenie.

3. *(4 body)* Majme vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ vo vektorovom priestore V. Nech $T : V \to W$ je lineárne zobrazenie. Ukážte, že ak sú vektory $T(x_1), T(x_2), \dots, T(x_n)$ lineárne nezávislé, potom sú aj vektory $x_1, x_2, \dots, x_n$ lineárne nezávislé.

4. *(6 bodov)* Nech V je vektorový priestor so skalárnym súčinom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a pre vektory $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ označme

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_k \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_2, v_k \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_k, v_1 \rangle & \langle v_k, v_2 \rangle & \dots & \langle v_k, v_k \rangle \end{pmatrix}.$$

a) Ukážte, že ak je G regulárna matica, potom sú vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárne nezávislé.
b) Ukážte, že ak sú vektory $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárne nezávislé, potom je G regulárna matica.
c) Nech $V = \operatorname{span}[v_1, v_2, v_3, v_4]$. O vektoroch v_1, v_2, v_3, v_4 vieme, že majú dĺžku $\sqrt{2}$ a navyše platí $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, v_4 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = \langle v_2, v_3 \rangle = -\langle v_3, v_4 \rangle = \sqrt{2}$ a $\langle v_2, v_4 \rangle = -2$. Určite, ktoré dvojprvkové, trojprvkové a štvorprvkové množiny pozostávajúce z vektorov v_1, v_2, v_3, v_4 sú lineárne nezávislé a ktoré lineárne závislé.
d) Nájdite dimenziu a bázu priestoru V z časti b). Ako bázové vektory použite vhodné vektory spomedzi v_1, v_2, v_3, v_4. Vyjadrite zvyšné vektory pomocou bázových vektorov.

5. *(15 bodov)* Pravda/Nepravda. So zdôvodnením v pravdivom prípade a protipríkladom v nepravdivom:
a) Ak $U \perp V$, tak $U^\perp \perp V^\perp$.
b) Množina $W = \{x \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 \cdot x_3 \le 0 \le x_2 \cdot x_4\}$ tvorí vektorový podpriestor v $\mathbb{R}^4$.
c) Ak systémy $Ax = b_1$ a $Ax = b_2$ nemajú riešenie, potom ani systém $Ax = b_1 + b_2$ nemá riešenie.
d) Obraz $\alpha(M)$ konvexnej množiny M v lineárnom zobrazení α je konvexná množina. *Množina M sa nazýva konvexná, ak pre všekty body $a, b \in M$ patrí aj úsečka $\{ta + (1-t)b \,|\, t \in \langle 0, 1 \rangle\}$ do M.*
e) Ak P je matica kolmej projekcie, tak aj PP^T je matica kolmej projekcie.
f) V priestore polynómov $\mathcal{P}(x)$ je zobrazenie dané predpisom $\alpha : p(x) \mapsto p(-x)$ lineárne.

6. *(5 bodov)* Nájdite determinant $n \times n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} -t & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & -t & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & -t & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -t & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -t + a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pre aké hodnoty parametra t je matica A singulárna?