

1. (5.5.10) a) Koľko stupňov voľnosti majú reálne symetrické matice, reálne diagonálne matice a reálne ortogonálne matice?

*Pozn.* stupeň voľnosti udáva dimenziu príslušného priestoru matíc, t.j. počet voľných parametrov, ktoré môžeme nezávisle na sebe meniť a stále zotrvať v danom priestore. Odpoveď v prvom prípade je súčtom zvyšných dvoch, vďaka rozkladu  $A = Q\Lambda Q^T$ .

b) Ukážte, že  $3 \times 3$  hermitovské matice majú 9 (reálnych) stupňov voľnosti a rovnaký výsledok dostaneme aj pre  $3 \times 3$  unitárne matice. Zamyslite sa, prečo toto nie je v rozpore s rozkladom  $A = U\Lambda U^H$  pre Hermitovské matice. (Stĺpce matice  $U$  môžeme násobiť ľubovoľným  $e^{i\theta}$ .)

2. (5.5.11) Overte, že rovnosť  $A = Q\Lambda Q^T$  sa pre reálnu symetrickú  $2 \times 2$  maticu  $A$  dá prepísať ako  $A = \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T$ , kde  $\lambda_1, \lambda_2$  sú vlastné hodnoty a  $x_1, x_2$  sú ortonormálne vlastné vektory. Nájdite takýto rozklad pre matice:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. (5.5.12) *Pravda/Nepravda.* Zdôvodnite v pravdivom prípade a nájdite protipríklad v nepravdivom:

a) Ak  $A$  je hermitovská matica, potom  $A + iI$  je invertibilná.

b) Ak  $Q$  je ortogonálna matica, potom  $Q + \frac{1}{2}I$  je invertibilná.

c) Ak  $A$  má reálne zložky, potom  $A + iI$  je invertibilná.

4. (5.5.14) Pre nasledujúce matice rozhodnite či patria do nižšie uvedených maticových množín.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad B = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Množiny ortogonálnych, invertibilných, projekčných, permutačných, hermitovských, diagonalizovateľných, symetrických a markovovských matíc a množina matíc hodnosti 1.

5. (5.5.16) Uveďte jeden významný fakt o vlastných hodnotách

a) reálnej symetrickej matice,

b) stabilnej matice; t.j. všetky riešenia systému  $du/dt = Au$  konvergujú do nuly,

c) markovovskej matice,

d) nedagonalizovateľnej matice,

e) singularnej matice.

f) ortogonálnej matice,

6. (5.5.17) Ukážte, že ak sú matice  $U$  a  $V$  unitárne, potom je unitárnou maticou aj ich súčin  $UV$ . Využite definičnú podmienku  $U^H U = I$ .

7. (5.5.18) Ukážte, že determinant unitárnej matice spĺňa  $|\det U| = 1$ , ale determinant sa nemusí nutne rovnať jednotke. Tiež ukážte, že matice  $U$  a  $U^H$  môžu mať rôzne determinanty. Opíšte všetky  $2 \times 2$  unitárne matice.

8. (5.5.19) Nájdite tretí stĺpec matice

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & i/\sqrt{2} & \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \\ i/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & \end{bmatrix},$$

tak aby bola unitárna. Akú veľkú voľnosť pri takomto výbere máme?

**9.** Nájdite chybu v nasledujúcom “dôkaze” toho, že každá vlastná hodnota matice s reálnymi zložkami je reálne číslo:

Rovnosť  $Ax = \lambda x$  môžeme zľava prenásobiť  $x^T$ , čím dostaneme  $x^T Ax = \lambda x^T x$ . Z toho  $\lambda = \frac{x^T Ax}{x^T x}$ , čo je pre  $x \in \mathbb{R}^n$  vždy reálne číslo.

(Porzite tiež str. 295 v knižke)

**10.** (5.5.21) Nájdite všetky  $3 \times 3$  matice, ktoré sú súčasne hermitovské, unitárne aj diagonálne. Koľko ich bude?

**11.** Ak vynásobíme hermitovskú maticu  $A$  reálnym číslom  $c$ , bude potom aj matica  $cA$  hermitovská? Ak zvolíme  $c = i$ , ukážte, že potom bude  $iA$  anti-hermitovská. Vysvetlite ako tento fakt súvisí s vetou o vlastných hodnotách hermitovských a anti-hermitovských matíc.

**12.** Ak  $A + iB$  je unitárna matica ( $A$  aj  $B$  sú reálne matice), ukážte, že  $Q = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$  je ortogonálna matica.

**13.\*** Predpokladajme, že  $\omega = e^{-i\frac{2\pi}{n}}$  je koreň rovnice  $z^n = 1$ . Majme maticu  $F$ , pre ktorú  $F_{ij} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(i-1)(j-1)}$ , teda

$$F = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(n-1)} \\ & & & \ddots & \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \dots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

Ukážte, že  $F$  je unitárna matica; tiež, že  $F^4 = I$  a odvoďte z toho, že vlastné hodnoty  $F$  sú  $1, -1, i$  a  $-i$ . Pomocou matematického softvéru (Matlab, Mathematica, Octave a pod.) nájdite násobnosti týchto vlastných hodnôt a vlastné vektory.

Matica  $F$  sa nazýva *Fourierova matica*, násobenie ňou zodpovedá tzv. *diskrétnej Fourierovej transformácii*. Pozrite tiež príklad č. 5 z DÚ 5 a [http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete\\_Fourier\\_transform](http://en.wikipedia.org/wiki/Discrete_Fourier_transform).