Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 7

Pre týždeň 6. apríla 2020

---

1. (5.6.13) Derivácia všeobecného polynómu $a + bx + cx^2 + dx^3$ stupňa 3 má tvar $b + 2cx + 3dx^2$. Pripomeňme si, že polynómy tvoria vektorový priestor a derivácia je lineárna transformácia.
a) Nájdite maticu D zodpovedajúcu derivovaniu, t.j.

$$D \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Vypočítajte D^4 a vysvetlite výsledok v reči derivácií.
c) Aké sú vlastné hodnoty a vlastné vektory matice D?

2.(5.6.24) a) Ukážte priamym výpočtom, že (horná) trojuholníková matica, povedzme 3×3, spĺňa svoju charakteristickú rovnicu: $(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)(T - \lambda_3 I) = 0$.
b) Odvoďte z toho *Cayley-Hamiltonovu vetu* pre diagonalizovateľné matice $A = S\Lambda S^{-1}$: Každá diagonalizovateľná matica je riešením svojej charakteristickej rovnice: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\dots(A - \lambda_n I) = 0$.

3. (5.R.22) Aké sú vlastné hodnoty matice A spĺňajúcej $A^2 = -I$? Ak A je taká reálna $n \times n$ matica, ukážte, že potom n musí byť párne. Uveďte príklad.

4. Nájdite všetky ortogonálne 2×2 matice, ktoré majú vlastné hodnoty 1 a -1. Akú transformáciu roviny $\mathbb{R}^2$ reprezentujú?

5. (5.6.16) a) Nájdite ortogonálnu maticu Q, tak aby platilo $Q^{-1}AQ = \Lambda$ pre

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nájdite tiež aj ďalší pár vlastných ortonormálnych vektorov x_1, x_2 pre $\lambda = 0$.
b) Overte, že $P = x_1 x_1^T + x_2 x_2^T$ je rovnaká matica pre oba páry. Vysvetlite.

6. (5.6.18) Nájdite normálnu maticu, ktorá nie je Hermitovská, anti–Hermitovská, unitárna ani diagonálna. Ukážte, že všetky permutačné matice sú normálne.

7. Nájdite dve normálne matice, ktorých súčin nebude normálna matica.
Pozn.: Toto znamená, že množina normálnych matíc nie je uzavretá vzhľadom na súčin. Je uzavretá vzhľadom na súčet?

8. (5.6.19) Predpokladajme, že T je 3×3 horná trojuholníková matica, jej zložky označme t_{ij}. Porovnajte zložky TT^H a $T^H T$ a ukážte, že ak sa rovnajú, musí byť T diagonálna.

9. (5.R.5) Existuje matica A taká, že matice typu $A + cI$ sú invertibilné pre všetky komplexné čísla c? Nájdite reálnu maticu A takú, že $A + rI$ bude invertibilná pre všetky reálne r.

10. (5.6.5) Ukážte, že ak je matica B invertibilná, potom sú matice AB a BA podobné.

11. (5.6.20) Ukážte, že ak je N normálna matica, potom $||Nx|| = ||N^H x||$ pre každý vektor x. Odvoďte z toho, že i-ty riadok matice N má rovnakú dĺžku ako i-ty stĺpec matice N.
Pozn.: Ak je N navyše horná trojuholníková, z tohto opäť vyplýva, že N musí byť diagonálna (porovnaj s príkladom č. 8).

12. Nájdite 3×3 maticu, pre ktorú má nula ako vlastná hodnota algebraickú násobnosť 3 a geometrickú násobnosť 1.

13.* Na priestore (nekonečne veľakrát) diferencovateľných funkcií $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ predstavuje derivácia $\frac{d}{dx}$ lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú "vlastné funkcie" tejto transformácie, t.j. také $f(x)$, že $\frac{df(x)}{dx} = \lambda f(x)$? Aké je spektrum $\frac{d}{dx}$?

Porovnajte s príkladom č. 1.

14.* Majme priestor $\mathcal{C}^\infty(\langle 0, 2\pi\rangle)$ nekonečne veľakrát diferencovateľných funkcií, ktoré sú periodické s periódou 2π. Na tomto priestore predstavuje druhá deriváca $\frac{d^2}{dx^2}$ lineárnu transformáciu. Ako vyzerajú "vlastné funkcie" tejto transformácie, t.j. také periodické $f(x)$, že $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \lambda f(x)$? Aké je spektrum $\frac{d^2}{dx^2}$?