Lineárna algebra a geometria II. – Domáca úloha č. 12

Pre týždeň 11. mája 2020

---

**1.** (6.2.9) Ak sa matica $A$ dá napísať ako $R^T R$, dokážte, že platí zovšeobecnená Cauchy–Schwarzova nerovnosť $|x^T Ay|^2 \leq (x^T Ax)(y^T Ay)$.

**2.** (6.2.17) Ak je matica $A$ kladne definitná a zväčšíme v nej zložku $a_{11}$, ukážte pomocou Laplaceovho rozvoja, že aj jej determinant sa zvýši. Nájdite príklad indefinitnej matice, kde toto nebude pravda.

**3.** (6.2.18) Z rozkladu $A = R^T R$ ukážte, že pre kladne definitné matice platí $\det A \leq a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$.
*Pomôcka:* Druhá mocnina dĺžky $j$-teho stĺpca matice $R$ bude práve zložka $a_{jj}$ v matici $A$, tiež treba použiť vzťah *determinant = objem.*

**4.** (6.2.19)(*L'japunovov test stability*) Predpokladajme, že $AM + M^H A = -I$ pre nejakú kladne definitnú maticu $A$. Ak $Mx = \lambda x$, ukážte, že $\operatorname{Re}\lambda < 0$.
*Pomôcka:* Vynásobte maticovú rovnosť $x^H$ a $x$.

**5.** (6.3.4) Je pravdou, že ak sú všetky pivoty matice väčšie ako 1, potom aj jej vlastné hodnoty sú väčšie ako 1? Overte na tridiagonálnych maticiach s diagonálami $-1$, $2$, $-1$.

**6.** (6.3.6) Algebraický dôkaz Sylvestrovho zákona zotrvačnosti prebieha nasledovne.
Rovnako ako na prednáške predpokladáme, že $A$ a $C^T AC$ nemajú nulové vlastné hodnoty. Potom nech $x_1, \ldots, x_p$ sú ortonormálne vlastné vektory matice $A$ zodpovedajúce kladným vlastným hodnotám $\lambda_i > 0$, $y_1, \ldots, y_q$ sú ortonormálne vlastné vektory matice $C^T AC$ zodpovedajúce záporným vlastným hodnotám $\mu_i < 0$.
a) Aby sme ukázali, že vektory $x_1, \ldots, x_p, Cy_1, \ldots, Cy_q$ sú lineárne nezávislé, predpokladajme, že nejaká ich kombinácia dá nulu:

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b_1Cy_1 + \cdots + b_qCy_q (= z, \text{povedzme}).$$

Ukážte, že $z^T Az = \lambda_1 a_1^2 + \cdots + \lambda_p a_p^2 \geq 0$ a tiež $z^T Az = \mu_1 b_1^2 + \cdots + \mu_q b_q^2 \leq 0$.
b) Odvoďte z toho, že všetky $a_i$ aj $b_i$ musia byť nulové, čo znamená lineárnu nezávislosť. Z toho ukážte, že $p + q \leq n$.
c) Rovnaký argument môžme použiť pre $n-p$ záporných vlastných hodnôt matice $A$ a $n-q$ kladných vlastných hodnôt matice $C^T AC$. To dá $n - p + n - q \leq n$. Ukážte, že potom $p + q = n$ a zákon zotrvačnosti naozaj platí.

**7.** (6.3.7) Ak je $C$ regulárna matica, ukážte, že $A$ a $C^T AC$ majú rovnakú hodnosť. Teda nula ako vlastná hodnota má pre obe matice rovnakú násobnosť.

**8.** (6.3.8) Experimentovaním zistite signatúru $2n \times 2n$ matice

$$A = \begin{bmatrix} I & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix},$$

kde $B$ je regulárna $n \times n$ matica.

**9.** Nech $A$ je symetrická a kladne definitná matica. Ukážte, že jej maximálne zložky sa musia nachádzať na diagonále.

**10.** Nech $M_{m,n}(\mathbb{R})$ označuje vektorový priestor reálnych matíc typu $m \times n$. Ukážte, že $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^T B)$ je kladne definitná symetrická bilineárna forma na $M_{m,n}(\mathbb{R})$ – t.j. je to skalárny súčin (Pozn. tr značí stopu – súčet diagonálnych zložiek matice). Nájdite ortonormálnu bázu priestoru matíc vzhľadom na túto formu, povedzme pre $(m, n) = (2, 3)$. Ako by sa situácia zmenila ak by sme definovali $\langle A, B\rangle' = \operatorname{tr}(AB^T)$? Ako by sme dostali (hermitovský) skalárny súčin na komplexnom vektorovom priestore $M_{m,n}(\mathbb{C})$?

**11.** Tzv. zovšeobecnený problém vlastných hodnôt je daný rovnicou $Ax = \lambda Mx$, kde $A$ a $M$ sú dve $n \times n$ matice. Ukážte, že takéto $\lambda$ sa dajú nájsť ako korene polynómu $\det(A - \lambda M)$ stupňa $n$ v premennej $\lambda$.

Predpokladajme navyše, že $M = R^T R$, t.j. $M$ je kladne definitná. Zmenou súradníc $y = Rx$ ukážte, že $Ax = \lambda Mx$ práve vtedy, keď $(R^T)^{-1} A R^{-1} y = \lambda y$, t.j. $\lambda$ je (obvyklou) vlastnou hodnotou matice $(R^T)^{-1} A R^{-1} = C^T A C$. (Pozri str. 343-345 v knižke)

**12.** Nech $A$ je symetrická matica, jej vlastné hodnoty $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sú zoradené vzostupne podľa veľkosti a k nim prislúchajú ortonormálne vlastné vektory $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Nájdite minimum a maximum výrazu

$$R(u) = \frac{u^T A u}{u^T u}, \qquad \text{pre} \quad u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0.$$

Využite fakt, že každé $u \in \mathbb{R}^n$ sa dá zapísať ako $u = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$. (pozri str. $348 - 350$ v knižke)