3.7/4.1

Def Diferenčná rovnica $u_{k+1} = A u_k$ je

a) Stabilná ak vl. hodnoty matice A spĺňajú $|\lambda_i| < 1$
b) neutrálne stabilná ak niektoré $|\lambda_i| = 1$ a ostatné $|\lambda_j| < 1$
c) nestabilná ak aspoň jedna vl. hodnota $|\lambda_i| > 1$.

sem 24.2.2009 Príklad s epidémiami a zmenou λ pomocou opatrení — sem 29.2.12, sem 3.3.15

Aplikácie do Ekonómie/Ekonomiky

Na tejto prednáške si ukážeme, ako sa dá teória spojená s vlastnými vektormi a hodnotami aplikovať v ekonomických modeloch.

Leontiefova vstupno-výstupná matica (Wassily Leontief, Nobelova cena za ekonómiu v. 1973)
- alebo produkčná matica

• obsahuje informácie o vzájomnom prepojení sektorov ekonomiky

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.1 & 0.7 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{(oceľ)} \\ \text{(potraviny)} \\ \text{(pracovné sily)} \end{array}$$

zložka a_{ij} udáva množstvo produktu i potrebné na výrobu jednotkového množstva produktu j.
(vstup i, výstup j)

sem 7.3.2017
sem 4.3.2019

Otázka: 1) Môže ekonomika vyprodukovať $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ - oceľe, potravín, práce ? V zmysle -

$$y = [\text{vyrobené} - \text{spotrebované}] = [\text{výstup} - \text{vstup}]$$

3) Aké by mali byť ceny ~~produktov~~ komodít aby reprezentovali produkčné vzťahy - t.j. peniaze by sa nemali hromadiť v žiadnom sektore.

2) Ak ekonomika vyprodukuje viac, ako spotrebuje, máme rast. Pri akej delbe zdrojov dostaneme najrýchlejší rast? Koľko to bude?

sem 26.2.13

4.2 OTVORENÝ MODEL

1 otázka zodpovedá tzv. otvorenému modelu ekonomiky

Ak vyprodukujeme $p=\begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$ jednotiek jednotlivých tovarov, potrebujeme na to Ap jednotiek tovarov na vstupe.

$$Ap = \begin{pmatrix}a_1\end{pmatrix}p_1 + \begin{pmatrix}a_2\end{pmatrix}p_2 + \begin{pmatrix}a_3\end{pmatrix}p_3$$

Čiže čistá produkcia je : $p - Ap = \cancel{y} = (I-A)p = y$

Rovnica, ktorú z toho dostávame je $p = (I-A)^{-1}y$.

Matica $(I-A)$ sa nazýva technologická matica.

Zdá sa, že odpoveďou by mala byť práve existencia inverznej matice k technolog. matici. Je tu však komplikácia.

Chceme aby y (očakávaná čistá produkcia) aj p (produkcia) boli vektory s nezápornými zložkami.

Nakoľko $p = (I-A)^{-1}y$, postačovalo by aby $(I-A)^{-1}$ mala nezáporné zložky.

Q: Kedy má $(I-A)^{-1}$ nezáporné zložky?

Odpoveď: A nesmie byť príliš veľká.
- Ak produkcia spotrebuje príliš veľa, nezostáva nám kladný výsledok na výstupe. A veľkosť matice súvisí práve s vlastnými hodnotami.

Tvrdenie Označme λ_1 ako najväčšiu vlastnú hodnotu matice A, potom:

Ak $\lambda_1 > 1$, $(I-A)^{-1}$ nie je nezáporná matica

Ak $\lambda_1 = 1$, $(I-A)^{-1}$ neexistuje

Ak $\lambda_1 < 1$, potom ~~môžme použiť takto~~:

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots$$

čo je súčet nezáporných matíc.

Dôkaz

Ako to ukázať? (Použiť Perronovu-Frobeniovu vetu) dôkaz v knižke

Tá hovorí niečo takéto:

4.3

Veta Ak A je matica s nezápornými zložkami, potom pre λ_1 najväčšiu vl. hodnotu má x_1 kladné zložky.

Preto:

1) ak $\lambda_1 > 1$ a x_1 je vlastný vektor matice A, potom x_1 je aj vlastný vektor matice $(I-A)$ (vl. hodnota $1-\lambda_1$) a aj $(I-A)^{-1}$ (vl. hodnota $\frac{1}{1-\lambda_1}$)

Ak $\lambda_1 > 1$, je toto číslo záporné. Preto $(I-A)^{-1}x_1 = \frac{1}{(1-\lambda_1)}x$ posiela kladný vektor x_1 na záporný násobok. Matica $(I-A)^{-1}$ nemôže byť nezáporná.

2) Ak $\lambda_1 = 1$, potom $\det(A - 1\cdot I) = 0$, čiže $I-A$ je tiež singulárna

3) Ak $\lambda_1 < 1$, potom $A^k \to 0$ a nekonečný rad

$$I + A + A^2 + A^3 + \dots$$ konverguje. / podobne ako iné geom. rady

Vynásobením $(I-A)$ dostaneme:

$$(I-A)(I+A+A^2+A^3+\dots) = I + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{A^3} + \dots - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cancel{A^3} - \cancel{A^4} - \dots = I$$

Pozn Matica A, ktorú sme tu mali na úvod má vlastné hodnoty $\lambda_1 = 0{,}9$, $\lambda_2 =$, $\lambda_3 =$, čiže je dobrá - dá sa vyprodukovať všetko...

3 otázka Uzavretý model

Vstupno-výstupný Model sa nazýva uzavretý ak sa všetka produkcia opäť spotrebuje nič sa nepresúva mimo systém.

Potom sa význam zložiek produkčnej matice A zmení:

v stĺpci j máme rozdelenie produktov sektoru j medzi ostatné sektory.

	poľ.	stav	odi.
poľn.	0.4	0.2	0.3
stav.	0.2	0.6	0.4
odevníctvo	0.4	0.2	0.3

T.j. zložka a_{ij} udáva podiel odvetvia i na celkovej produkcii odvetvia j.

nakoľko sa "nič nestráca" súčty spotrebovanej produkcie musia dať 100%, t.j. súčty po stĺpcoch dávajú 1-ku, ide o Markovovskú maticu.

Ako chápať ~~to znamená, keď~~ prenásobenie tejto matice vektorom $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$?

$(0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3)$ — ak p_1, p_2, p_3 sú ceny, potom označuje celkové náklady na na produkciu odvetvia č.1 — poľnohosp.

Keďže náklady = cena produktu (ani peniaze sa nestrácajú) máme rovnice:

$$0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3 = p_1$$
$$0.2 \cdot p_1 + 0.6 p_2 + 0.4 p_3 = p_2$$
$$0.4 p_1 + 0.2 p_2 + 0.3 p_3 = p_3$$

Alebo $A \cdot p = Ip$, $(A - I)p = 0$.

riešením je vektor $p = t \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, čiže ceny pri stabilnom obehu by mali byť také aby $\boxed{\text{cena poľn} = \text{cena odev} = \tfrac{3}{2}\,\text{cena stav.}}$

(2) Úloha Von Neumanov model rastúcej ekonomiky. (podľa času...)
Skôr nie — odkaz na Emilku.

sem 8.3.16 IV

4.5

Matice a diferenciálne rovnice

Začnime s niečím jednoduchším:

úroky: Ako sa počítajú úroky. $k=5$

8% p.a. úročíme raz ročne po k rokoch $(1{,}08)^k p_0$

8% p.a. úročíme raz za štvrťrok po k rokoch $(1{,}02)^{4k} p_0$

8% p.a. úročíme raz za mesiac po k rokoch $\left(1+\frac{0.08}{12}\right)^{12k} p_0$

8% p.a. úročíme denne po k rokoch $\left(1+\frac{0.08}{365}\right)^{365k} p_0$

ako by to bolo ak by sme úroky pripisovali kontinuálne?

8% p.a. spojité úročenie po k rokoch:

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{0.08}{t}\right)^{t\cdot k} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{0.08}{t}\right)^{\left(\frac{t}{0.08}\right)0.08\cdot k}$$

$$= e^{0.08\cdot k} = \dots$$

diferenčná rovnica

iný pohľad: $\Delta p = p_1 - p_0 = p_0 \cdot \text{úrok}$

$p_1 = (1+\text{úrok})\, p_0$

riešenie poznáme: $p_k = (1+\text{úrok})^k \cdot p_0$

čisté exponenciálne

v spojitom prípade:

$$\frac{dp}{dt} = p\cdot \text{úrok}$$

riešenie: $p(t) = e^{\text{úrok}\cdot t}$

naozaj $\left(e^{\text{úrok}\, t}\right)' = \text{úrok}\left(e^{\text{úrok}\cdot t}\right)$ ✓ splňa.

Teraz bude našou snahou aplikovať túto vec na matice.

tu sme si ukázali príklad exponenciálneho rastu/poklesu.

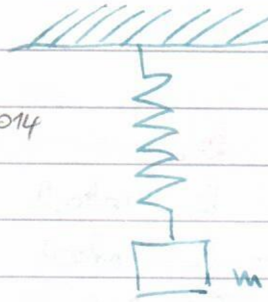
- zmena premennej x závisí lineárne od aktuálnej hodnoty x.
  + príklady: úroky, rast populácie, rozpad rádioaktívnych prvkov

riešením je funkcia $x(t) = x_0 \cdot e^{\alpha t}$

$\dot{x}(t) = x_0 \cdot \alpha\, e^{\alpha t} = \alpha\, x(t)$

SEM 10.3.2015

Príklad Kmitajúca pružinka (alebo harmonický oscilát



Sem 11.3.2014 →

- čo o tom vieme – bude to kmitať.
- prečo? lebo platí niečo ako Hookov zákon, ktorý hovorí o tom akou silou pôsobí pružina proti svojmu naťahovaniu/stlačeniu
- nebudeme zachádzať do fyzikálnych detailov, napíšme rovno rovnicu

$$\boxed{F = \boxed{ma = -kx}}$$

zrýchlenie   poloha

k je kladná konštanta - tuhosť, s patričným fyzikálnym rozmerom.

Lenže vieme, že zrýchlenie $a = v'$ je deriváciou rýchlosti
a rýchlosť $v = x'$ je deriváciou polohy

Čiže rovnicu môžme prepísať ako
$$ma + kx \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Riešením je funkcia spĺňajúca túto rovnicu.

Ako hľadať riešenie? kde sú matice?

Sem 14.3.2017 →

Pointa bude, podobne ako pre Fibonacciho čísla, v nahradení jednorozmernej premennej $x(t)$ pre dif. rovnicu 2 stupňa neznámym vektorom pre dif. rovnicu 1. stupňa.

$$u = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

potom $$u' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ -\frac{k}{m}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Au$$

Aké riešenie očakávať? Rovnica sa podobá na tie,

4.7

Kde sme mali exponenciálne riešenia, skúsme

$$u(t) = u_0 \cdot e^{At}$$

Čo by to malo byť?

sem 7.3.17

Pozrime sa na vlastné vektory matice A: λ_1, λ_2 vl. hodnoty
y_1, y_2 vl. vektory

ak $Ay_1 = \lambda_1 y_1$,
skúsme nájsť riešenie v tvare
$u(t) = f(t) \cdot y_1$

$$f'(t)\, y_1 = u' = Au = A\, f(t) y_1 = f(t)\, A y_1 = f(t)\, \lambda_1 y_1$$

čo je $f'(t) = \lambda_1 f(t)$ – riešením je exponenciálna funkcia
$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, $u_1 = c_1 e^{\lambda_1 t} \cdot y_1$

Podobnú vec sa dá spraviť aj pre druhú vlastnú hodnotu λ_2
a dostať:

$$c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad u_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 .$$

Všeobecné riešenie bude mať, vzhľadom na linearitu, tvar

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2}$$

sem 3.3.09

sem 11.3.19 IV

Čo sa dá prepísať ako:

$$\boxed{u(t) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}$$

Odkiaľ sú $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$? Keďže v čase 0 máme $u(0) = u_0$
malo by byť $u_0 = c_1 \underbrace{e^{0t}}_{1} y_1 + c_2 \underbrace{e^{0t}}_{1} y_2$

teda $u_0 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

alebo $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = S^{-1} u_0$

sem 5.3.13