Dajme to dohromady: všeobecné riešenie rovnice

$$\boxed{u' = Au}$$

má tvar

$$u(t) = S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix} = \boxed{S\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix} S^{-1} u_0}$$

kde S je diagonalizačná matica matice A, $A = S\Lambda S^{-1}$.

Pozn ① Ak by sme sa inšpirovali 1-rozm. prípadom, mohli by sme písať:

$$u(t) = e^{At} u_0 = S e^{\Lambda t} S^{-1} u_0$$

To treba chápať ako: pre $\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$ bude jej exponenciála

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t}\end{bmatrix}.$$

Pozn ② Podobné zdôvodnenie by fungovalo aj pre diagonalizovateľnú $n\times n$ maticu, matica $\cancel{A}$ $e^{\Lambda t}$ v strede by bola diagonálna s členmi $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$.

Skôr ako sa vrátime k riešeniu pohybovej rovnice pružinky, pozrime sa na maticové exponenciály.

Funkcia $e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ priraďuje reálnemu číslu $x \mapsto e^x$.

Podobne maticová funkcia priradí matici $A \mapsto e^A$
(resp. $At \mapsto e^{At}$).

Na analýze ste počuli, že e^x sa dá vypočítať (definovať) pomocou nekonečného radu (Taylorov rozvoj):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Ak by sme v tejto nekonečnej sume nahradili číslo x maticou At, dostaneme:

$$\boxed{e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots}$$

Dá sa overiť, že takto definované umocňovanie má základné vlastnosti:

- $(e^{As})(e^{At}) = e^{A(s+t)}$
- $e^{At} \cdot e^{-At} = e^{A \cdot 0} = I$
- $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A e^{At}$

Ale pozor, neplatí $e^A \cdot e^B \neq e^{A+B}$ (násobenie matíc nemusí byť komutatívne)

Z poslednej rovnice plynie, že

$$\frac{d}{dt}(e^{At} \cdot u_0) = A \cdot e^{At} \cdot u_0$$ – čím sme dostali riešenie rovnice $u' = Au$.

Týmto sme dostali dva rôzne opisy matice e^{At} pre diagonalizovateľné matice, a bolo by dobré aby súhlasili. A naozaj! $(A = S\Lambda S^{-1})$

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots = I + S\Lambda S^{-1}t + \frac{(S\Lambda S^{-1})^2 t^2}{2!} + \frac{(S\Lambda S^{-1})^3 t^3}{3!}$$

$$= S\left(I + \Lambda + \frac{\Lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\Lambda^3 t^3}{3!} + \dots\right)S^{-1} = S e^{\Lambda t} S^{-1} \quad ✓$$

Vráťme sa naspäť ku kmitajúcej pružinke. Matica, ktorá popisovala jej pohyb bola $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}$.

Potrebujeme spočítať jej vlastné hodnoty, vlastné vektory, atď.

char polynóm $\quad \det \quad \chi_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \frac{k}{m}$

• Tu si treba uvedomiť, že číslo k udáva tuhosť pružiny. Ak si vzmyslíme fyzikálnu interpretáciu, (pružina kladie odpor voči naťahovaniu/stlačeniu) musíme mať $k>0$. To ale vedie ku komplexným vl. hodnotám:

vl. hodnoty
$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m}}$$

Počítajme ďalej:

vlastné vektory

$\lambda_1 = i\sqrt{k/m}$
$$\begin{bmatrix} -i\sqrt{k/m} & 1 \\ -k/m & -i\sqrt{k/m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ i\sqrt{k/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$\lambda_2 = -i\sqrt{k/m}$
$$\begin{bmatrix} i\sqrt{k/m} & 1 \\ -k/m & i\sqrt{k/m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -i\sqrt{k/m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Preto diagonalizačná matica S bude $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{k/m} & -i\sqrt{k/m} \end{pmatrix}$.

Po chvíli počítania dostaneme:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{2i\sqrt{k/m}} \\ 1/2 & \frac{-1}{2i\sqrt{k/m}} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{k/m}\,t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{k/m}\,t} \end{pmatrix}.$$

Z tohto nie sme veľmi múdrejší, pokiaľ nebudeme vedieť, že

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.}$$

(Videlo sa niekedy niečo takéto ?) (Vrátime sa k tomu)

Takže pokračujme s dosadením: $e^{\Lambda t} = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k/m}\,t + i\sin\sqrt{k/m}\,t & 0 \\ 0 & \cos\sqrt{k/m}\,t - i\sin\sqrt{k/m}\,t \end{pmatrix}$

Roznásobením:

$$Se^{\Lambda t}S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\sqrt{\frac{k}{m}} & -i\sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} & 0 \\ 0 & e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & \frac{1}{2i\sqrt{k/m}} \\ 1/2 & \frac{-1}{2i\sqrt{k/m}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} & \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2i\sqrt{k/m}} \\ \frac{i\sqrt{\frac{k}{m}}\left(e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} - e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}\right)}{2} & \frac{e^{i\sqrt{\frac{k}{m}}t} + e^{-i\sqrt{\frac{k}{m}}t}}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k/m}\,t & \frac{\sin\sqrt{k/m}\,t}{\sqrt{k/m}} \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t & \cos\sqrt{k/m}\,t \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -k/m & 0 \end{pmatrix}t}.$$

Použili sme vzťahy:
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \qquad \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta$$

Riešenie pohybovej rovnice preto bude:
$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = u(t) = e^{At}\cdot u_0 = \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k_{/m}}\,t & \frac{1}{\sqrt{k_{/m}}}\sin\sqrt{k_{/m}}\,t \\ -\sqrt{k_{/m}}\sin\sqrt{k_{/m}}\,t & \cos\sqrt{k_{/m}}\,t \end{pmatrix}(u_0).$$

Takže ak máme dané počiatočné podmienky $u_0 = \binom{x_0}{v_0}$, počiatočnú polohu a rýchlosť, vieme spočítať polohu a rýchlosť v čase t.

Pozn. Vidíme tu sínusy a kosínusy, ktoré sme vlastne čakali, rovnako perióda oscilácie bude závislá od $\sqrt{k_{/m}}$ – tuhosti pružiny.

Stabilita riešení

Podobne ako pre diferenčné rovnice, môžeme sa baviť o stabilite riešení diferenciálnych rovníc. Vieme, že všeobecné riešenie je kombináciou čistých exponenciálnych riešení:

$$\boxed{u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} y_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} y_2 + \ldots + c_n e^{\lambda_n t} y_n}$$

Preto veľkosť vektora $u(t)$ bude závisieť hlavne od správania sa funkcie $e^{\lambda t}$ pre $t \to \infty$. Výsledok môžme zhrnúť takto:

Riešenie diferenciálnej rovnice $\frac{du}{dt} = Au$ je

stabilné ak $e^{At} \to 0$, a to je vtedy, keď $Re\,\lambda_i < 0$ pre všetky i

neutrálne stabilné ak e^{At} má ohraničenú veľkosť ale nejde do 0. To je vtedy, keď $Re\,\lambda_i \le 0$ $(\forall i)$ a $Re\,\lambda_j = 0$ pre nejaké j.

nestabilné ak e^{At} je neohraničené, čo sa stane ak $Re\,\lambda_i > 0$ pre nejaké i.

5.5. Vlastné hodnoty & vlastné vektory : reálne vs. komplexné

Na minulých dvoch prednáškach a dnes sme videli dôležité aplikácie teórie spojenej s vlastnými hodnotami a vl. vektormi.
- diferenčné a diferenciálne rovnice

V oboch prípadoch sme potrebovali lepšie rozumieť štruktúre vlastných vektorov a vl. hodnôt. Preto bude mať význam ďalej sa tejto téme venovať, hlavne teoreticky.

Okrem toho sa tu zrazu častejšie objavujú komplexné čísla.
– je čas sa na ne pozrieť detailnejšie.

Čo sú komplexné čísla?
- vieme ich sčítať, násobiť a deliť
- majú viacero zápisov
- vieme ich kresliť, do Gaussovej roviny

- $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$

- Pre komplexné čísla tiež vieme definovať normu (alebo abs. hod[illegible]

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = r$$

- A argument. – to je presne uhol θ z druhého a tretieho popis[illegible]

- každý z popisov je vhodný na opis iných operácií. Napríklad násobenie dá:

$$r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$$

t.j. normy sa násobia, argumenty sčítajú.
(to že sa to rovná, sa dá overiť sčítacími vzorcami pre cos a s[illegible]

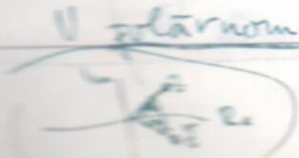
- Pre $z = a+ib$ môžeme definovať k nemu komplexne združené čís[illegible]

$\bar{z} = a - ib.$ (preklopenie cez Re os

V polárnom zápise

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\bar{z} = r(\cos\theta - i\sin\theta) = r(\cos(-\theta) + i\sin[illegible]$$



5.6.

Vynásobením $z \cdot \bar{z}$ dostaneme $z\bar{z} = a^2 + b^2 = r^2$

- na jednej strane nám to dáva predpis pre abs. hodnotu komplexného čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- ale tiež predpis pre prevrátenú hodnotu $\frac{1}{z}$, lebo

$$\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}}$$

← V čitateli máme reálne číslo, ktorým vieme deliť ľahko.

sem 15.3.16

Posledná vec, ~~ku~~ ktorej sa musíme prizrieť je zápis $re^{i\theta}$ pomocou exponenciálneho zobrazenia. Čo to je?

Formálne môžme použiť Taylorov rozvoj:

$$e^{i\theta} = 1 + (i\theta) + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \dots =$$

$$= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} + \dots$$

Každý nepárny člen obsahuje i alebo $-i$ (je rýdzo imaginárny) každý párny člen obsahuje iba reálne hodnoty. Rozdelíme to:

$$= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots\right) = \cos\theta + i\sin\theta$$

sem 18.3.2014

Lenže to sú taylorove rozvoje pre funkcie $\cos\theta$ a $\sin\theta$. Týmto sme ukázali, že e^x, $\cos x$ a $\sin x$ spolu veľmi úzko súvisia. Preto pri počítaní pružinky vyšla exponenciálna funkcia, ktorá je vlastne kosínus. (lebo v exponente boli imaginárne veci).

Komplexné čísla a matice

Kde sme sa na lineárnej algebre stretávali s komplexnými číslami?
Prišla (reálna) matica $\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, spočítali sme jej vlastné hodnoty, ktoré vyšli $\pm i$. Preto sme pri hľadaní vlastných vektorov boli nútení riešiť sústavy $\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.
Hľadali sme nulový priestor komplexnej (?) matice.

5.7. / 6.1

Takže z matice $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, ktorá popisovala pekné zobrazenie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (otočenie o 90° proti smeru hodinových ručičiek), máme zrazu maticu $A-iI$, ktorá prirodzene žije v $\mathbb{C}^2$.

Takže sme boli donútení opustiť priestor $\mathbb{R}^2$ a presunúť sa na jeho rozšírenie $\mathbb{C}^2$ a tam spočítať vl. vektory.
sem 19.3.15 Tento proces sa nazýva komplexifikácia.

sem 19.3.12
sem 21.3.17
Lepšie si ho ilustrujeme na nasledovnom: (PÍSOMKA!)

asi sem 10.3.09

Def Vektorový priestor V nad poľom skalárov ($\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3,\dots,\mathbb{Z}_p,\dots$) je množina spĺňajúca osem podmienok:

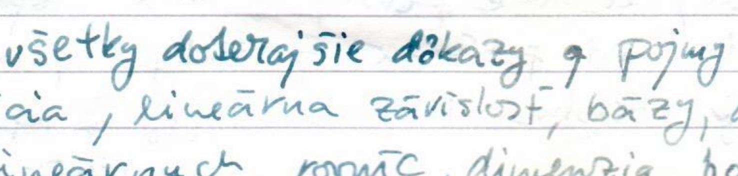
1) $v+w=w+v$ (komutatívne sčítanie vektorov) 5) $1\cdot v=v$ (exist. 1)
2) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (asociatívnosť) 6) $c_1(c_2v)=c_1c_2v$ (asoc. násob.)
3) $\exists\, 0\in V$: $0+v=v+0=v$ (nulový vektor) 7) $c(v+w)=cv+cw$ (dist.)
4) $(\forall v)$ $\exists$ opačný vektor $v+(-v)=0$ (opačný prvok) 8) $(c_1+c_2)v=c_1v+c_2v$

Potom vektorové priestory nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ alebo $\mathbb{Q}$ sa v zásade líšia iba tým, aké skaláry pripustíme.

- Takže rovnako, ako sme mali vektorový priestor $\mathbb{R}^n$ tvorený n-ticami reálnych čísel $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, budeme mať priestory $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$ či $\mathbb{Z}_p^n$

- Podobne všetky doterajšie dôkazy a pojmy a postupy ako eliminácia, lineárna závislosť, bázy, determinanty, štruktúra riešení lineárnych rovníc, dimenzia, hodnosť a pod. budú fungovať rovnako nad $\mathbb{R}$ ako nad $\mathbb{C}$ či $\mathbb{Q}$.

Príklad Zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$ dané maticou $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=A$ je pekné zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$



~~[illegible]~~ Naozaj, racionálny bod $\binom{p}{q}$ zobrazí na $\binom{q}{2p}$, čo je opäť bod s racionálnymi súradnicami $\in\mathbb{Q}^2$