5.7. / 6.1

Takže z matice $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, ktorá popisovala pekné zobraz… z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (otočenie o 90° proti smeru hodinových ru…) máme zrazu maticu $A-iI$, ktorá prirodzene žije v $\mathbb{C}$…

Takže sme boli donútení opustiť priestor $\mathbb{R}^2$ a pozrieť sa na jeho rozšírenie $\mathbb{C}^2$ a tam spočítať vl. vektory.

sem ~~19~~ 14.3.15 Tento proces sa nazýva komplexifikácia.

sem 14.3.12
sem 21.3.~~19~~

Lepšie si ho ilustrujeme na nasledovnom: (PÍSOMKA!)

asi sem 10.3.09

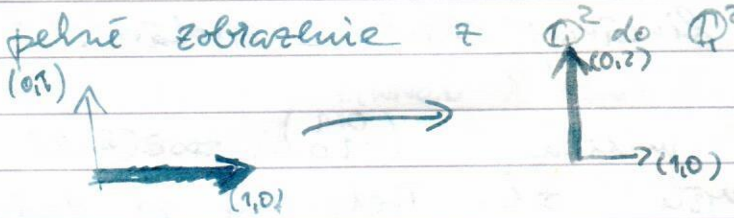
Def Vektorový priestor V nad poľom skalárov $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \dots, \mathbb{Z}_p, \dots)$ je množina spĺňajúca osem podmienok:

1) $v+w=w+v$ (komutatívne sčítanie vektorov)
2) $u+(v+w)=(u+v)+w$ (asociatívnosť)
3) $\exists\, 0\in V$: $0+v=v+0=v$ (nulový vektor)
4) $(\forall v)$ $\exists$ opačný vektor $v+(-v)=0$ (opačný prvok)
5) $1\cdot v=v$ (exist. 1)
6) $c_1(c_2 v)=c_1c_2 v$ (asoc. náso…)
7) $c(v+w)=cv+cw$ (dist…)
8) $(c_1+c_2)v=c_1v+c_2v$

Potom vektorové priestory nad $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ alebo $\mathbb{Q}$ sa v zásade líšia iba tým, aké skaláry pripúšťajú.

- Takže rovnako, ako sme mali vektorový priestory $\mathbb{R}^n$ tvorený n-ticami reálnych čísel $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$, budeme mať priestory $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{C}^n$ či $\mathbb{Z}_p^n$
- Podobne všetky doterajšie dôkazy a pojmy a postupy ako eliminácia, lineárna závislosť, bázy, determinanty, štruktúr… riešení lineárnych rovníc, dimenzia, hodnosť a pod. budú fungovať rovnako nad $\mathbb{R}$ ako nad $\mathbb{C}$ či $\mathbb{Q}$.

Príklad Zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$ dané maticou $\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=A$ je pekné zobrazenie z $\mathbb{Q}^2$ do $\mathbb{Q}^2$



~~Ako~~ Vidíme však Naozaj, racionálny bod $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ zobrazí na $\begin{pmatrix}q\\2p\end{pmatrix}$, čo je opäť bod s racionálnymi súradnicami $\mathbb{Q}^2$

6.2

Lenže pri výpočte vlastných hodnôt a vl. vektorov matice A narazíme na problém:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

čiže vlastné vektory nájdu: $\lambda_1=\sqrt{2}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\lambda_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Ale tie nepatria do $\mathbb{Q}^2$. Vieme ich do roviny $\mathbb{R}^2$ nakresliť, aj si ich predstaviť, ale do $\mathbb{Q}^2$ nepatria. $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$

na scénu prichádza $(A-\sqrt{2}I)$

Preto pri počítaní vl. vektorov matice A musíme opustiť priestor $\mathbb{Q}^2$, pridať všetky iracionálne body a dostať $\mathbb{R}^2$. $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$

(minimálne body typu $a+b\sqrt{2}$ $(a,b\in\mathbb{Q})$)

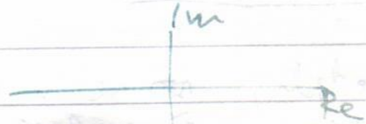
Matica zobrazenia A zostane rovnaká, len ju teraz budeme vnímať ako maticu zobrazenia medzi $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$. ↑

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{2})^2$

sem 18.3 2019 ▽

Niečo podobné sa deje, keď $\mathbb{R}^2$ nahradíme $\mathbb{C}^2$.

Ako sme konštruovali $\mathbb{C}$?



- $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$ Komplexné číslo $z=a+ib$ má dve zložky, ktoré sú samy o sebe reálne čísla. Preto môžeme $\mathbb{C}$ chápať ako $\mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}$.

Podobne $\mathbb{C}^n$ - množina n-tíc komplexných čísel bude

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbb{R}^n} + i\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

každý vektor $z\in\mathbb{C}^n$ vieme zapísať ako vektor $x\in\mathbb{R}^n$ a plus vektor $iy \in i\mathbb{R}^n$. Preto $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$

Def Pre každý reálny vektorový priestor V (skaláry sú reálne) môžeme uvažovať jeho <u>komplexifikáciu</u> $V\oplus iV$, ktorú dostaneme ako súčet dvoch kópií V-čka (jedna reálna, druhá imaginárna

8.3

Násobenie ~~sk~~ komplexným skalárom $(a+ib)$ definujeme ako

$$(\vec{v}+i\vec{w})(a+ib) = (a\vec{v}-b\vec{w})+i(a\vec{w}+b\vec{v})$$

Ľahko sa presvedčíme, že naozaj $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, potom $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$.

Potom každé lineárne (reálne) zobrazenie $\alpha: V \to V$ sa dá rozšíriť na (komplexné) lineárne zobrazenie
$\alpha': V+iV \to V+iV$

daní predpisom $\alpha'(v+iw) = \alpha(v)+i\alpha(w)$.

Cvič. overiť, že ide o komplexné lin. zobrazenie.

sem 12.3.2013

Dĺžka v $\mathbb{C}^n$

Ako sme povedali, ~~vä~~ veľká väčšina konceptov lineárnej algebry nezávisí od poľa skalárov, s ktorými pracujeme. Sú však aj výnimky – pokiaľ ide napr. o skalárny súčin.

V $\mathbb{R}^n$ sme mali $\|x\|^2 = x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2$

Takýto predpis ale pre $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ nebude dávať veľmi zmysel: $1^2+(i)^2=0$
ale $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ je nenulový vektor, nemal by mať nulovú normu.

ale $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ je nenulový vektor – nemal by mať nulovú normu.

Vhodnou náhradou je v $\mathbb{C}^n$ zvoliť normu
$$\|x\|^2 = |x_1|^2+|x_2|^2+\dots+|x_n|^2,$$
čo sa dá napísať ako
$$\|x\|^2 = \overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2+\dots+\overline{x_n}x_n \qquad (x_i \in \mathbb{C}).$$

Ak zvolíme normu takto, bude sa dať vyjadriť pomocou skalárneho súčinu:
$$\overline{x}^T y = \overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2+\dots+\overline{x_n}y_n$$

Def. V $\mathbb{C}^n$ máme tzv. štandardný Hermitovský skalárny súčin daný $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y\rangle = \overline{x}^T y = \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \ldots + \overline{x_n} y_n.$$

Pozorovanie
- ak by sme skúsili nejaké konkrétne vektory, rýchlo by sme si všimli, že $\overline{y}^T x$ sa vo všeobecnosti nerovná $\overline{x}^T y$.
  - t.j. súčin nie je symetrický

  ale $\overline{\langle x, y\rangle} = \langle y, x\rangle$
- dokonca ak x nahradíme cx, potom dostaneme $\langle cx, y\rangle = \overline{(cx)}^T y = \overline{c}\, \overline{x}^T y = \overline{c}\langle x, y\rangle$
  - čiže nie je ani lineárny v prvej zložke.
  - sesquilineárny $\langle x, dy\rangle = \overline{x}^T dy = d\, \overline{x}^T y = d\langle x, y\rangle$

Poznámky
- vektor x^T sme nazývali transponovaným k x, vektor $\overline{x}^T$ (teda transponovaný a komplexne združený) sa bude nazývať Hermitovsky združený k x (značíme x^H alebo x^*)
- podobne niečo sa dá spraviť aj pre matice, a tak ako sme mali $(AB)^T = B^T A^T$ dostaneme aj $(AB)^H = B^H A^H$.
- dva vektory x, y v $\mathbb{C}^n$ budú ortogonálne, ak $\overline{x}^T y = 0$.
- dĺžka vektora x je $\|x\| = (x^H x)^{1/2} = \sqrt{\overline{x_1} x_1 + \overline{x_2} x_2 + \ldots + \overline{x_n} x_n}$

Symetrické matice, Hermitovské matice

- Ukážeme si, že symetrické matice majú všetky vlastné hodnoty reálne a dajú sa k nim nájsť ortonormálne vlastné vektory.
- V skutočnosti dokážeme silnejšie tvrdenie pre tzv. Hermitovské matice.
  - symetrické matice spĺňajú $A^T = A$
  - obdobne - Hermitovské matice spĺňajú $A^H = A$ $\quad (\overline{A}^T = A)$.

každá (reálna) symetrická matica je aj hermitovská (premyslieť si)

6.5

Vlastnosť 1 Ak $A = A^H$, potom pre všetky (komplexné) vektory $x \in \mathbb{C}^n$ platí $x^H A x \in \mathbb{R}$.

Dôkaz $c = x^H A x$ je matica typu 1×1, teda číslo. Čo dostaneme ak by sme ~~to~~ Hermitovsky združili?

$$\bar{c} = c^H = (x^H A x)^H = x^H A^H (x^H)^H = x^H A x = c.$$

čiže $\bar{c} = c$, a teda $c \in \mathbb{R}$.

Vlastnosť 2 Každá vlastná hodnota hermitovskej matice je reálne čís

Dôkaz Nech λ je vlastná hodnota, k nej prislúchajúci vlastný vektor $Ax = \lambda x$.

$$\text{Potom} \quad x^H (Ax) = x^H \lambda x = \lambda x^H x = \lambda \|x\|^2.$$

Z vlastnosti 1 máme, že ľavá strana je reálne číslo a pravá strana je λ krát kladné reálne číslo $\|x\|^2$.

Preto $\lambda = \dfrac{x^H A x}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$.

Vlastnosť 3 Vlastné vektory reálnej symetrickej matice (alebo Hermit prislúchajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogo

Dôkaz Nech $Ax_1 = \lambda x_1$ a $Ay_2 = \lambda y_2$ a $A^H = A$.

$$\text{Potom:} \quad \bar{\lambda}_1 \langle x, y \rangle = \bar{\lambda}_1 x^H y = (\lambda_1 x)^H y = (Ax)^H y = x^H A^H y =$$

$$= x^H A y = x^H (\lambda_2 y) = \lambda_2 x^H y = \lambda_2 \langle x, y \rangle.$$

keďže λ_1 a λ_2 sú reálne čísla (vlastnosť 2), z predpoklad $\lambda_1 \neq \lambda_2$ máme $\langle x, y \rangle = x^H y = 0$

$$(\lambda_1 \langle x, y \rangle = \lambda_2 \langle x, y \rangle \qquad \lambda_1 \neq \lambda_2).$$

Pozn. Vlastné vektory môžeme "naťahovať" a "skracovať", t.j. aj násobok vlastného vektora zostane vlastným vektorom. Preto sa dajú brať jednotkovej dĺžky: x nahradiť $\frac{x}{\|x\|}$.

Ak ~~je~~ má symetrická matica rôzne vlastné hodnoty, potom je diagonalizovateľná (to sme ukázali ~~s~~ dávnejšie), máme rozklad:

$$S^{-1} A S = \Lambda$$

Navyše ale vieme, že Λ má reálne zložky (vl. 2) a S sa dá vybrať tak, že (podľa 3) jej stĺpce majú jednotkovú dĺžku a sú navzájom kolmé, teda S je ortogonálna a platí $S^{-1} = S^T$, $SS^T = S^T S = I$.

Tvrdenie (Veta o hlavných osiach, Spektrálna veta)
Ak A je reálna symetrická matica ($A^T = A$) potom existuje diagonalizačná matica Q taká, že Q je ortogonálna matica. Teda existuje rozklad:

$$\boxed{A = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Lambda Q^T}$$

Stĺpce Q sú vlastné vektory matice A, diagonálna Λ obsahuje reálne vl. hodnoty na diagonále.

~~Pozn~~ sem 24.3.2015

Pozn. Dôkaz tejto vety ešte stále nemáme – na to budeme potrebovať ďalšiu (netriviálnu) teóriu.
Prípad, ktorý by mohol spôsobovať problémy, predstavujú viacnásobné vlastné hodnoty. Ak geom. nás. (λ) = alg. nás. (λ), tak vlastné vektory pre túto vl. hodnotu vieme vybrať tak, aby boli ortogonálne (Gram-Schmidt). sem 21.3.1?
Potrebujeme ukázať, že pre symetrickú (hermitovskú) maticu bude vždy platiť geom. nás. (λ) = alg. nás. (λ), resp. že takéto matice sú diagonalizovateľné. Rozmyslieť si, kedy je matica s viacnásobnými vl. hodnotami diagonalizovateľná.

Príklad $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (x, y) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 + 4xy + y^2$

rovnica $(x, y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1$ predstavuje čo? Hyperbola ~~Elipsa~~

Potom: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, vl. vektory $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$$1 = \frac{3}{2} (x + y)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x - y)^2$$

obr.

VI
sem 22.3.16
sem 35.3.14