7.2

Pozn. Kuželosečky, resp. kvadratické formy ~~[illegible]~~ budú súvisieť s rovnicou: $x^TAx = c$, pomocou symetrickej matice A a vektorov $x \in \mathbb{R}^n$

je to tu vhodné? ?

z rozkladu $A = Q\Lambda Q^T$ dostaneme

$$x^TAx = x^TQ\Lambda Q^Tx = (Q^Tx)^T\Lambda(Q^Tx) = c$$

nové súradnice (stĺpce matice Q), teda dávajú hlavné osi kuželosečky.

z tohto dôvodu sa zvykne táto veta nazývať veta o hlavných osiach

Pozn. Ale
$$A = Q\Lambda Q^T = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - & x_1^T & - \\ - & x_2^T & - \\ & \vdots & \\ - & x_n^T & - \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda_1 x_1 x_1^T + \lambda_2 x_2 x_2^T + \dots + \lambda_n x_n x_n^T$$

- teda A sa dá napísať ako súčet n matíc hodnosti 1.
- Množina $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ sa nazýva spektrum matice A, každá z matíc $x_i x_i^T$ predstavuje projekciu na priestor generovaný x_i.

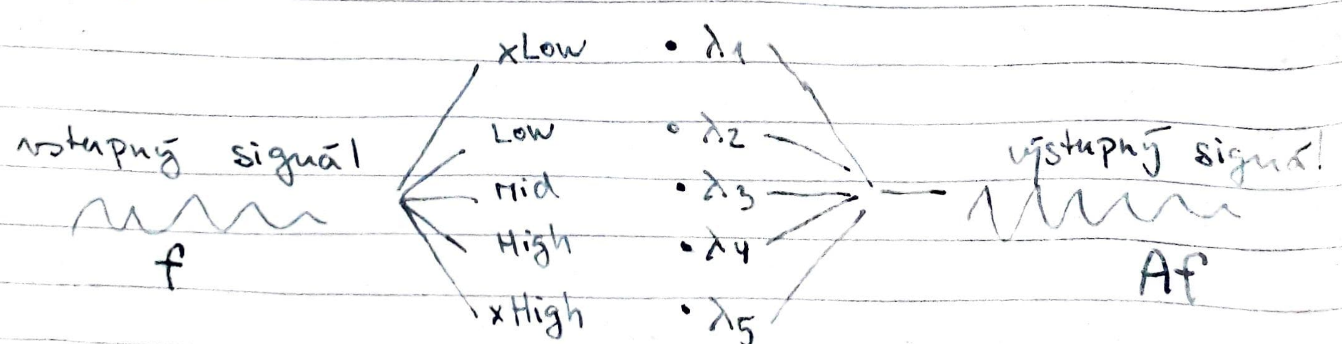
Čo spraví matica A so ~~signálom~~ vektorom y?

$$y = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

$$Ay = A(c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n) = c_1\lambda_1x_1 + c_2\lambda_2x_2 + \dots + c_n\lambda_nx_n$$

Koeficienty c_i dostaneme projekciou, a potom matica A každú zložku x_i "zosilní" práve "λ_i" krát.

Príklad Analógia so zosilovačom:



- z tohto dôvodu sa zvykne nazývať veta o rozklade $A = Q\Lambda Q^T$ aj spektrálna veta.

Poznáme odpoveď (aj keď ju zatiaľ nevieme dokázať) pre symetrické matice.

- Ako to bude pre iné (reálne) matice?
  - môžu byť vl. hodnoty reálne? Môžu...
  - budú vlastné vektory ortogonálne? Nie.

    Rozklad $A = Q \Lambda Q^T$ vedie k:
    $$A^T = (Q \Lambda Q^T)^T = Q \Lambda^T Q^T = Q \Lambda Q^T = A.$$
    čiže ak sú vl. vektory ortogonálne, vl. hodnoty reálne, matica už musí byť symetrická.
- Ako je to s komplexnými vlastnými hodnotami reálnych matíc?

Tvrdenie Ak $\lambda = a + ib$ je koreňom polynómu $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ s reálnymi koeficientami, potom aj $\bar{\lambda} = a - ib$ je koreňom.

Sem 25.3.19 VI

Dôkaz Predpokladajme $p(\lambda) = 0$, ~~tzv.~~ potom:

$$0 = \bar{0} = \overline{p(\lambda)} = \overline{a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0} = \bar{a}_n (\bar{\lambda})^n + \bar{a}_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \ldots + \bar{a}_1 \bar{\lambda} + \bar{a}_0$$

$$= a_n (\bar{\lambda})^n + a_{n-1} (\bar{\lambda})^{n-1} + \ldots + a_1 (\bar{\lambda}) + a_0 = p(\bar{\lambda}).$$
(lebo $a_i \in \mathbb{R}$)

Teda aj $\bar{\lambda}$ je koreňom. ∎

Dôsledok Ak $\lambda = a + ib$ je vlastnou hodnotou reálnej matice A, potom aj $\bar{\lambda} = a - ib$ je vlastnou hodnotou reálnej matice A. Inými slovami - komplexné vlastné hodnoty "chodia v pároch".

Dôkaz $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ je pre reálnu $n \times n$ maticu A polynóm stupňa n s reálnymi koeficientami. Ak je $\lambda_0 = a + ib$ vlastnou hodnotou, $\chi_A(\lambda_0) = 0$, tak aj $\bar{\lambda}_0 = a - ib$ je vlastnou hodnotou podľa predošlého tvrdenia. ∎

7.4

Unitárne matice

Vrátiac sa naspäť k vlastným hodnotám a vektorom Hermitovskej matice. – spektrum je reálne, vlastné vektory možno brať tak, že sú ortonormálne (ale vzhľadom na hermitovský skalárny súčin).

V reálnom prípade: matice s ortonormálnymi stĺpcami $\langle x,y\rangle$

splňajú $Q^TQ = I = QQ^T$

– ortogonálne matice

V komplexnom prípade môžeme postupovať analogicky:

skalárnemu súčinu zodpovedá $\langle x,y\rangle = x^Hy$,

z čoho máme rovnosť:

$$U^HU = I = UU^H$$

(lebo inverzia je určená jednoznačne)

· Takéto komplexné matice sa nazývajú **unitárne**.

Def (definičná vlastnosť) Matica $U \in M_{n,n}(\mathbb{C})$ sa nazýva unitárna ak $U^HU = UU^H = I$ resp. $U^{-1} = U^H$

Vlastnosť 2 Násobenie unitárnou maticou U je naozaj komplexná obdoba násobenia ortogonálnou maticou Q (otočenia, preklopenia) – zachováva skalárny súčin a dĺžky.

$$\cdot \quad \|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux\rangle = x^HU^HUx = x^Hx = \|x\|^2$$

$$\cdot \quad \langle Ux, Uy\rangle = x^HU^HUy = x^Hy = \langle x,y\rangle$$

Vlastnosť 3 Každá vlastná hodnota unitárnej matice má absolútnu hodnotu 1, t.j. $|\lambda| = 1$.

Dôkaz Nech $Ux = \lambda x$, potom $\|Ux\| = \|x\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

Vlastnosť 4 Vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám unitárnej matice U sú navzájom ortogonálne.

Dôkaz Nech $Ux = \lambda_1 x$ a $Uy = \lambda_2 y$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Potom $\langle x, y \rangle = x^H y = x^H U^H U y = \langle Ux, Uy \rangle = \langle \lambda_1 x, \lambda_2 y \rangle$

$= \bar{\lambda}_1 \lambda_2 \langle x, y \rangle$.

Potom platí buď $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 = 1$ alebo $0 = \langle x, y \rangle$. Keďže λ_1, λ_2 sú komplexné čísla veľkosti 1, $\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{\lambda_1}$, teda a $1 \neq \bar{\lambda}_1 \lambda_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$. ~~[illegible]~~ Platí teda $\langle x, y \rangle = 0$.

Príklad Reálna ortogonálna matica je zároveň unitárna $(Q^H = \bar{Q}^T = Q^T = Q^{-1})$.

Tak skúsme:

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

vlastné hodnoty budú $e^{i\theta}, e^{-i\theta}$ $(\cos\theta \pm i \sin\theta)$, vlastné vektory $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$, ktoré sú Hermitovsky kolmé a po predelení $\sqrt{2}$ dávajú jednotkové vektory. Dostávame rozklad:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}}_{\Lambda} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix}}_{U^H}$$

Antihermitovské matice

Zovšeobecnením antisymetrických matíc (definičná rovnosť $A^T = -A$) sú tzv. anti-Hermitovské matice spĺňajúce

$$K^H = -K$$

Tvrdenie Vlastné hodnoty antihermitovskej matice K sú rýdzo imaginárne (t.j. tvaru $\lambda = ib$), jej vlastné vektory zodpovedajúce rôznym vlastným hodnotám sú navzájom ortogonálne (hermitovsky).

Dôkaz: Ak je K anti-hermitovská, potom je iK hermitovská,

7.6

lebo: $(iK)^H = \bar{i} K^H = (-i)(-K) = iK.$

Teda matica iK je Hermitovská a vieme o nej:
- má reálne vlastné hodnoty
- jej vlastné vektory sú kolmé.

Ak spektrum $(K) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, potom spektrum $(iK) = \{i\lambda_1, \dots$
tiež existujú ortogonálne vektory:

$$(iK) = (i\lambda_j)\, x_j$$

Lenže potom: $i\lambda_j \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_j \in i\mathbb{R}$

x_j ~~ješ~~ sú vl. vektory matice (ik), tak sú aj vlastnými vektormi matice K. (teda sú kolmé)

Alebo inak: ak $A = U\Lambda U^H$, potom $K = iA = U(i\Lambda)U^H$.

<u>Otázka</u> Videli sme, že pre Hermitovské matice máme:

$A^H A = A$ $A = U\Lambda U^H$ Λ - reálne $\lambda_i \in \mathbb{R}$

pre Unitárne:

$U^H U = I$ $U = V\Lambda V^H$ Λ - $|\lambda_i| = 1$

pre antihermitovské

$K^H = -K$ $K = U\Lambda U^H$ Λ - výdzo imaginárne $\lambda_i \in i\mathbb{R}$

Čo vieme povedať o matici, ktorej diagonalizačná matica je unitárna? T.j. $N = U\Lambda U^H$?
Rozhodne potom musí platiť:

$$N^H N = (U\Lambda U^H)^H (U\Lambda U^H) = (U\Lambda^H U^H)(U\Lambda U^H) =$$

$$= U\bar{\Lambda}\Lambda U^H = U\Lambda\bar{\Lambda}U^H = (U\Lambda U^H)(U\bar{\Lambda}U^H) =$$

$$= (U\Lambda U^H)(U\Lambda^H U^H) = NN^H.$$

<u>Definícia</u> Hovoríme, že komplexná matica N je <u>normálna</u>, ak spĺňa
$N^H N = NN^H$.

<u>Pozn</u> Hermitovské, unitárne aj anti-hermitovské sú normálne

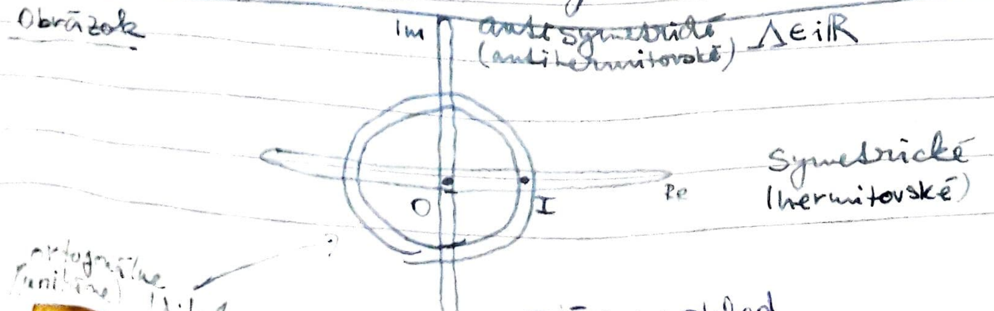
Prieskumný výlet do sveta komplexných VP a matíc prerušíme ohľadom späť, porovnanim 7.7

Porovnanie komplexného a reálneho

Reálne	Komplexné
$\mathbb{R}^n$ = priestor ~~vekto~~ vektorov s n reálnymi zložkami	$\mathbb{C}^n$ = priestor vektorov s n komplexnými zložkami.
dĺžka $\lVert x\rVert^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$	$\lVert x\rVert^2 = \lvert x_1\rvert^2 + \lvert x_2\rvert^2 + \ldots + \lvert x_n\rvert^2$
transpozícia: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$	Hermitovské združenie $(A^H)_{ij} = \overline{A}_{ji}$
$(AB)^T = B^T A^T$	$(AB)^H = B^H A^H$
skalárny súčin: $x^T y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$	hermitovský skalárny súčin: $x^H y = \overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \ldots + \overline{x}_n y_n$
$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y = \langle x, A^T y\rangle$	$\langle Ax, y\rangle = (Ax)^H y = x^H A^H y = \langle x, A^H y\rangle$
kolmosť $x^T y = 0$	kolmosť $x^H y = 0$
symetrické matice $A^T = A$ $A = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T$ (reálne Λ)	Hermitovské matice $A^H = A$ $A = U\Lambda U^{-1} = U\Lambda U^H$ (reálne Λ)
antisymetrické matice $K^T = -K$	antihermitovské matice $K^H = -K$
ortogonálne matice $Q^T Q = I$ alebo $Q^T = Q^{-1}$	unitárne matice $U^H U = I$ alebo $U^H = U^{-1}$
$\langle Qx, Qy\rangle = (Qx)^T (Qy) = x^T y = \langle x, y\rangle$	$\langle Ux, Uy\rangle = (Ux)^H (Uy) = x^H y = \langle x, y\rangle$
$\lVert Qx\rVert = \lVert x\rVert$	$\lVert Ux\rVert = \lVert x\rVert$

Q, U (ortogonálne, unitárne) majú $\lvert\lambda\rvert = 1$ a vl. vektory ortonormálne.

Obrázok



Polárny rozklad

Ak by sme sa pozreli na matice, ako na nejaké zovšeobecnené čísla ... $\Lambda \in \mathbb{R}$

Potom môžeme schematicky predošlé výsledky zakresliť pomocou obrázku

[Sem 5.4.16 XII]